

## Groupes et graphes : phénomènes de rigidités

Paul-Henry Leemann

10 novembre 2020

Travail en commun avec Mikael de la Salle (ENS Lyon).  
Exposé disponible sur  
[www.leemann.website/slides/rigidity.pdf](http://www.leemann.website/slides/rigidity.pdf)

### Ce dont il est question

Un sujet à l'intersection de

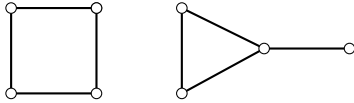
- ▶ Théorie géométrique des groupes ;
- ▶ Combinatoire et graphes ;
- ▶ Probabilités et marches aléatoires.

### Théorie géométrique des groupes

- ▶ Théorie géométrique des groupes : faire le lien entre des groupes et des espaces géométriques.
- ▶ Une **représentation du groupe  $G$**  est un automorphisme  $G \rightarrow \text{Aut}(V)$  où  $V$  est un espace vectoriel.
- ▶ Plus généralement, on peut regarder  $G \rightarrow \text{Aut}(X)$  où  $X$  est un *espace géométrique avec de bonnes propriétés*.
- ▶ Dans notre cas on va s'intéresser à  $X$  un graphe et  $G \cong \text{Aut}(X)$ .

## Graphes

- ▶ Un **graphe**  $X$  est constitué d'un ensemble  $V$  de sommets et d'un ensemble  $E$  d'arrêtes.



- ▶ Un graphe  $X$  est **connexe** si pour toute paire de sommets  $(v, w)$  il existe un chemin reliant  $v$  à  $w$ .
- ▶ Un graphe  $X$  est **localement fini** si tout sommet n'a qu'un nombre fini d'arrêtes adjacentes.

## Une première question

### Question

Quels sont les groupes  $G$  de type fini, tel qu'il existe un graphe  $X$  connexe et localement fini avec  $G = \text{Aut}(X)$ .

- ▶ C'est vrai pour tout groupe de type fini [Groot (1959) et Sabidussi (1960)];
- ▶ Que se passe-t-il si on met plus de structure sur  $X$  ?

## Graphes réguliers

### Définition

L'action de  $\text{Aut}(X)$  sur  $X$  est **régulière** si elle est libre et transitive sur les sommets. C'est-à-dire si pour toute paire de sommets  $(v, w)$  il existe un unique automorphisme de  $X$  envoyant  $v$  sur  $w$ .

## Question principale

### Question

Quels sont les groupes  $G$  de type fini, tel qu'il existe un graphe  $X$  connexe et localement fini avec  $G = \text{Aut}(X)$  agit **régulièrement** sur  $X$ .

- ▶ Dans ce cas  $X$  est un graphe de Cayley de  $G$  [Sabidussi, 1958].
- ▶ Résolu dans les années 70 pour les groupes finis [Imrich, Watkins, Nowitz, Hetzel, Godsil...].
- ▶ Résolu pour les produits libres de groupes de type fini [Watkins, 1976].
- ▶ Résolu [L. - de la Salle] en 2019-2020 pour les groupes infinis de type finis.

## Graphes de Cayley

### Définition

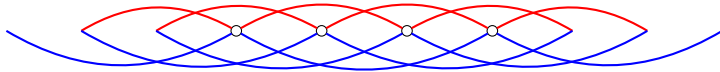
Soit  $G$  un groupe et  $S = S^{-1}$  un ensemble de générateurs. Le **graphe de Cayley** est le graphe avec sommets  $V = G$  et avec un arc entre  $g$  et  $gs$  pour tout  $s \in S$  :

$$g \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xleftarrow{s^{-1}} \end{array} gs = g \begin{array}{c} \xrightarrow{\{s, s^{-1}\}} \\ \xleftarrow{\{s, s^{-1}\}} \end{array} gs$$

### Exemple

►  $\text{Cayl}(\mathbf{Z}, \{\pm 1\}) = \dots \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \dots$

►  $\text{Cayl}(\mathbf{Z}, \{\pm 2, \pm 3\}) =$



## Graphes de Cayley

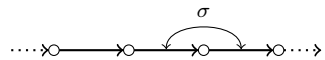
- Chaque arête est constituée d'une paire d'arcs.
- Chaque arc à une **étiquette** ( $s \in S$ ).
- La **couleur** d'une arête est la paire de ses étiquettes ( $\{s, s^{-1}\} \subset S$ ).

$$\text{Cayl}(\mathbf{Z}, \{\pm 1\}) = \dots \circ \begin{array}{c} \xrightarrow{+1} \\ \xleftarrow{-1} \end{array} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \dots$$

- $G \curvearrowright \text{Cayl}(G, S)$  par multiplication à gauche.
- On a

$$G = \text{Aut}_{\text{et}}(\text{Cayl}(G, S)) \leq \text{Aut}_{\text{coul}}(\text{Cayl}(G, S)) \leq \text{Aut}(\text{Cayl}(G, S)).$$

## Exemple pour $\mathbf{Z}$

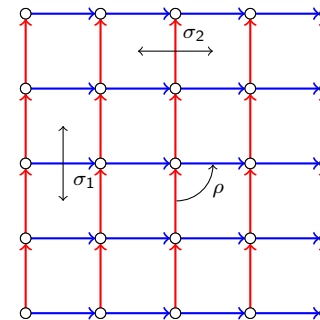


$$\text{Aut}_{\text{et}}(\text{Cayl}(\mathbf{Z}, S)) = \mathbf{Z}$$

$$\text{Aut}_{\text{coul}}(\text{Cayl}(\mathbf{Z}, S)) = \langle \mathbf{Z}, \sigma \rangle = D_{\infty}$$

$$\text{Aut}(\text{Cayl}(\mathbf{Z}, S)) = D_{\infty}$$

## Exemple pour $\mathbf{Z}^2$



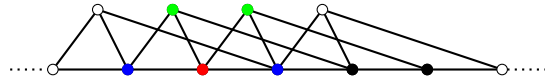
$$\text{Aut}_{\text{et}}(\text{Cayl}(\mathbf{Z}^2, S)) = \mathbf{Z}^2$$

$$\text{Aut}_{\text{coul}}(\text{Cayl}(\mathbf{Z}^2, S)) = \langle \mathbf{Z}^2, \sigma_1, \sigma_2 \rangle$$

$$\text{Aut}(\text{Cayl}(\mathbf{Z}^2, S)) = \langle \mathbf{Z}^2, \sigma_1, \sigma_2, \rho \rangle$$

## Un graphe avec $\text{Aut}(X) = \mathbf{Z}$

On commence avec  $X = \text{Cayl}(G, S)$  auquel on ajoute des décorations pour forcer l'orientation.



Exercice : trouver  $X$  avec  $\text{Aut}(X) = \mathbf{Z}^2$ .

## Question principale (bis repetita)

### Question

Quels sont les groupes  $G$  de type fini tel qu'il existe un ensemble fini de générateurs  $S$  avec  $G = \text{Aut}(\text{Cayl}(G, S))$  ?

Lorsque  $G = \text{Aut}(\text{Cayl}(G, S))$ , on dit que  $\text{Cayl}(G, S)$  est une **représentation graphique régulière** (GRR) et que  $G$  est **rigide** s'il existe un tel  $S$ .

## Groupes non-rigides

### Fait

Si  $G$  est abélien et est différent de  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ , alors il n'est pas rigide. En effet, l'application  $g \mapsto g^{-1}$  est automorphisme de  $\text{Cayl}(G, S)$  pour tout  $S$ .

### Fait

Si  $G$  est un groupe dicyclique généralisé, alors il n'est pas rigide. L'application  $a \mapsto a, xa \mapsto a^{-1}x^{-1}$  est un automorphisme de  $\text{Cayl}(G, S)$  pour tout  $S$ .

$G$  est **dicyclique généralisé** s'il n'est pas abélien et  $G = A \rtimes_x A$  avec  $A$  sous-groupe abélien,  $x$  d'ordre 4 et  $xax^{-1} = a^{-1}$  pour tout  $a \in A$ . Exemple :  $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ .

### Fait

Il existe 13 groupes exceptionnels d'ordre au plus 32 qui ne sont pas rigides (et ni abélien (différent de  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}^n$ ) ni dicyclique généralisé).

## Groupes rigides

### Théorème (Imrich, Watkins, Nowitz, Hetzel, Godsil..., 1969-1981)

Soit  $G$  un groupe fini. Si  $G$  n'est ni dicyclique généralisé, ni abélien (différent de  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ ) ni un des 13 groupes exceptionnels, alors il est rigide.

- ▶ Pleins de sous-cas, pas de construction unifiée ;
- ▶ Utilise fortement le fait que  $G$  est fini (Feit-Thompson, ...).

### Théorème (Watkins, 1976)

Si  $G = G_1 * \dots * G_n$  est un produit libre de groupes de type finis, alors il est rigide.

## Asymptotique

### Théorème (Babai-Godsil, 1982)

*Si  $G$  est un groupe nilpotent, non-abélien, fini d'ordre impair, alors asymptotiquement presque tous les graphes de Cayley de  $G$  sont des GRR.*

## Résultat principal

### Théorème (L. - de la Salle, 2019-2020)

*Soit  $G$  un groupe infini de type fini. Si  $G$  n'est ni dicyclique généralisé ni abélien, alors il est rigide. De plus, pour tout ensemble fini de générateurs  $S$ , il existe  $S \subset T$  fini tel que  $\text{Cayl}(G, T)$  soit un GRR.*

- ▶ Que deux sous-cas, idée générale commune ;
- ▶ Marche aussi pour les groupes finis avec un élément d'ordre *grand*. En particulier, donne que pour tout entier  $n$  il y a seulement un nombre fini de groupes de rang  $n$  qui sont exceptionnels.
- ▶ Une forme faible de comportement asymptotique.

## Idée principale

- ▶ Rappel :

$$G = \text{Aut}_{\text{et}}(\text{Cayl}(G, S)) \leq \text{Aut}_{\text{coul}}(\text{Cayl}(G, S)) \\ \leq \text{Aut}(\text{Cayl}(G, S)).$$

- ▶ En partant de  $S$  on va construire  $T$  et vérifier séparément que chacune des inégalités ci-dessus est en fait une égalité.

## Structure de la preuve

### Proposition 1

*Soit  $G$  un groupe qui n'est ni dicyclique généralisé, ni abélien (différent de  $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ ). Alors pour tout ensemble de générateurs  $S$ , il existe  $S \subset T$  (fini si  $S$  est fini) tel que  $\text{Aut}_{\text{col}}(\text{Cayl}(G, T))$  préserve le  $S$ -étiquetage.*

### Proposition 2

*Soit  $G$  un groupe infini de type fini. Alors pour tout ensemble fini de générateurs  $T$ , il existe  $T \subset U$  fini tel que  $\text{Aut}(\text{Cayl}(G, U))$  préserve les  $T$ -couleurs.*

### Proposition 3

*Soit  $S \subset T \subset U$  comme ci-dessus. Alors  $\text{Cayl}(G, U)$  est un GRR pour  $G$ .*

### Preuve de la proposition 3

Soit  $\varphi$  un élément de  $\text{Aut}(\text{Cayl}(G, U))$ . Alors  $\varphi$  appartient à  $\text{Aut}_{\text{col}}(\text{Cayl}(G, T))$  par la proposition 2 et donc aussi à  $\text{Aut}_{\text{et}}(\text{Cayl}(G, S))$  par la proposition 1. C'est-à-dire qu'il existe  $g \in G$  tel que pour tout  $h$ , on a  $\varphi(h) = gh$ .

Soit  $h \xrightarrow{u} hu$  un arc de  $\text{Aut}(\text{Cayl}(G, U))$ . Alors les sommets sont envoyés par  $\varphi$  sur  $gh$  et  $ghu$ . Or dans  $\text{Aut}(\text{Cayl}(G, U))$  il existe un unique arc entre  $gh$  et  $ghu$  et il est étiqueté par  $u$ . On a donc montré que  $\varphi$  est dans  $\text{Aut}_{\text{et}}(\text{Cayl}(G, U))$ .

### Esquisse de preuve de la proposition 1

- ▶ Soit  $G$  un groupe,  $S = S^{-1}$  un ensemble de générateurs et  $T = (S \cup S^2 \cup S^3) \setminus \{1\}$ .
- ▶ On regarde le sous-groupe  $H$  de  $\text{Aut}_{\text{col}}(\text{Cayl}(G, T))$  des automorphismes qui fixent le sommet  $1_G$ .
- ▶ Ce sont les bijections  $\varphi: G \rightarrow G$  satisfaisant

$$\varphi(1) = 1 \text{ et } \forall g \in G, \forall t \in T, \varphi(gt) \in \varphi(g)\{t, t^{-1}\}$$

- ▶ On montre que si  $H$  ne fixe pas  $S$ , alors  $G$  est abélien ou dicyclique généralisé. La preuve est combinatoire et le groupe des quaternions  $Q_8$  joue un rôle important.

### Preuve de la proposition 2 : des triangles

- ▶ On va utiliser un invariant géométrique pour différencier une arête coloriée par  $\{s^{\pm 1}\}$  d'une arête coloriée par  $\{t^{\pm 1}\}$  : le nombre de triangles auxquelles elles appartiennent.
- ▶ Pour  $s \in S$ , on note  $\text{Tr}(s, S)$  le nombre de triangles de  $\text{Cayl}(G, S)$  contenant l'arête  $\overset{g}{\circ} \xrightarrow{s^{\pm 1}} \overset{gs}{\circ}$  (ne dépend pas de  $g$ ).
- ▶ On a toujours  $\text{Tr}(s, S) = \text{Tr}(s^{-1}, S)$ .

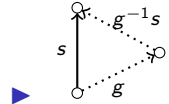
### Preuve de la Proposition 2

- ▶ Étant donnée  $S$  fini, on va construire  $S \subset T$  fini tel que :
  - ▶ Pour tout  $s \in S$  on a  $\text{Tr}(s, T) \geq 7$ ;
  - ▶ Pour tout  $t \in T \setminus S$  on a  $\text{Tr}(t, T) \leq 6$ ;
  - ▶ Pour tout  $s, s' \in S$  on a  $\text{Tr}(s, T) = \text{Tr}(s', T)$  si et seulement si  $s' = s$  ou  $s' = s^{-1}$ .
- ▶ Pour ce faire, on va montrer un lemme technique qui dit qu'on peut augmenter le nombre de triangles de  $s_0 \in S$  sans augmenter le nombre de triangles auquel appartiennent les éléments de  $S \setminus \{s_0, s_0^{-1}\}$ .
- ▶ En appliquant plusieurs fois ce lemme, on a gagné.

## Lemme technique

Soit  $s \in S$ .

- ▶ Pour tout  $g \in G$ , on regarde  $S_g = S \cup \{g, g^{-1}, g^{-1}s, s^{-1}g\}$ .



- ▶ On veut  $g \in G$  tel que :
  - ▶ On augmente bien les triangles pour  $s$  ( $\text{Tr}(s, S_g) > \text{Tr}(s, S_g)$ );
  - ▶  $\text{Tr}(g, S_g) \leq 6$  et  $\text{Tr}(g^{-1}s, S_g) \leq 6$ ;
  - ▶ On n'augmente pas les triangles pour  $t \in S \setminus \{s, s^{-1}\}$ .
- ▶ Cela nous donne une liste de conditions :  $g \notin S$ ,  $s^{-1}g \notin S$ , ...

## Une condition algébrique

Au final on obtient le critère suivant :

Il existe  $F \subset G$  fini tel que si  $g, s^{-1}g \notin F$  et  $g^2, (s^{-1}g)^2 \notin F$ , alors  $S_g$  marche.

On note  $\text{sq}: G \rightarrow G, g \mapsto g^2$ , ainsi  $\text{sq}^{-1}(F)$  est l'ensemble des éléments  $g \in G$  tel que  $g^2 \in F$ .

## Dichotomie

Pour la suite de la preuve, on a deux cas :

- ▶  $G$  a un élément d'ordre infini (ou d'ordre *suffisamment grand*);
- ▶  $G$  n'est pas virtuellement abélien.

Rappel :  $G$  est **virtuellement abélien** s'il contient un sous-groupe  $H$  d'indice fini et abélien. Par exemple, tout groupe fini est virtuellement abélien.

De plus, si  $G$  est virtuellement abélien et de type fini, alors il est fini ou a un élément d'ordre infini.

## $G$ a un élément d'ordre infini

Soit  $g_0 \in G$  d'ordre infini.

- ▶ On ne regarde que les éléments de  $\langle g_0 \rangle \cong \mathbf{Z} \leq G$ .
- ▶ Dans  $\mathbf{Z}$ , chaque élément a au plus une racine carrée.
- ▶ Donc il existe une infinité d'éléments  $g$  de  $\langle g_0 \rangle$  tel que  $g, s^{-1}g \notin F$  et  $g^2 \notin F$ .
- ▶ Avec un peu de travail supplémentaire, on obtient le résultat désiré sauf que lorsqu'on augmente les triangles pour  $s$ , on peut peut-être aussi augmenter les triangles pour  $s^2$ .
- ▶ Si on fait attention à dans quel ordre on applique ce lemme, alors ce n'est pas très grave d'augmenter aussi les triangles pour  $s^2$ .

## $G$ n'est pas virtuellement abélien

Pour  $G$  quelconque et  $F \subset G$  fini il est possible que  $\text{sq}^{-1}(F)$  soit infini ; on ne peut donc pas appliquer la stratégie précédente telle quelle.

Mais on peut montrer

### Proposition 4

*Soit  $G$  un groupe de type fini qui n'est pas virtuellement abélien.*

*Pour tout  $s \in G$  et  $F \subseteq G$  fini, l'ensemble*

*$G \setminus (\text{sq}^{-1}(F) \cup s \text{sq}^{-1}(F))$  est infini.*

### Corollaire

*Soit  $G$  un groupe de type fini qui n'est pas virtuellement abélien.*

*Pour tout  $s \in G$  et  $F \subseteq G$  fini, il existe  $g \in G$  tel que*

$$g, s^{-1}g \notin F \quad \text{et} \quad g^2, (s^{-1}g)^2 \notin F.$$

## Preuve de la proposition 4

Pour montrer la proposition 4, on utilise :

- ▶ Si  $G$  est de type fini et pour tout  $g \in G$  on a  $g^2 = 1$ , alors  $G$  est fini ;
- ▶ Un lemme de Dicman sur les sous-groupes normaux ;
- ▶ Des marches aléatoires sur les groupes, dont un résultat de Tointon.

## Un lemme de Dicman

### Lemme (Dicman)

*Soit  $G$  un groupe et  $F \subset G$  fini. Si tout élément de  $F$  a ordre fini et si  $F$  est invariant par conjugaison, alors le sous-groupe normal  $\langle F \rangle^G$  est fini.*

## Une application du lemme de Dicman

### Corollaire

*Soit  $G$  un groupe de type fini, alors  $G$  est infini si et seulement si  $\text{sq}(G)$  est fini.*

### Démonstration.

Soit  $F = \text{sq}(G)$ , c'est un sous-ensemble clos par conjugaison. Si  $F$  est fini, alors il ne contient que des éléments d'ordre finis. Le groupe  $G/\langle F \rangle^G$  est de type fini et tous ses éléments ont ordre 2, il est donc fini. Mais par Dicman  $\langle F \rangle^G$  est fini, et donc  $G$  est fini.  $\square$



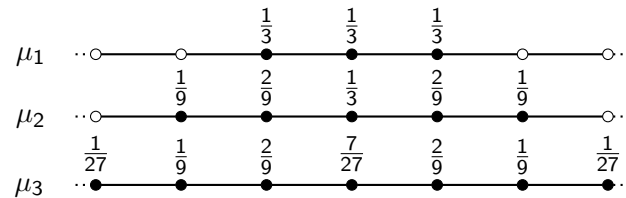
## Marches aléatoires sur les sous-groupes

Soit  $G$  un groupe de type fini et  $S = S^{-1}$  un ensemble fini de générateurs qui contient 1.

Soit  $\mu$  la probabilité uniforme de choisir un élément de  $S$  et  $\mu_n = \mu^{*n}$  la marche aléatoire correspondante.

### Exemple

$G = \mathbf{Z}$  et  $S = \{-1, 0, 1\}$



## Un théorème de Tointon

### Théorème (Tointon, 2020)

Soit  $G$  de type fini,  $S = S^{-1}$  fini, générateur, qui contient 1 et  $\mu$  la probabilité uniforme sur  $S$ . Soit  $g_n$  et  $h_n$  deux réalisations indépendantes de  $\mu_n$ . Si  $G$  n'est pas virtuellement abélien,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(g_n \text{ et } h_n \text{ commutent}) = 0$$

### Corollaire (L.-dIS.)

Mêmes hypothèses. Si  $G$  n'est pas virtuellement abélien, alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(g_n^2 = 1) \leq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Avec plus de travail, on peut montrer la Proposition 4.

## Variations sur un thème

On peut se poser la question de ce qui se passe pour les graphes dirigés. Pour  $S \subset G$  pas forcément symétrique, on définit  $\vec{\text{Cayl}}(G, S)$  de manière analogue à  $\text{Cayl}(G, S)$ .

### Question


Quels sont les groupes  $G$  de type fini tel qu'il existe  $S$  fini et générateur avec  $G = \text{Aut}(\vec{\text{Cayl}}(G, S))$  ?

- ▶ Plus facile que de trouver un GRR ;
- ▶ Tous les groupes finis, sauf 5 exceptions (Babai, 1980) ;
- ▶ Tous les groupes infinis, mais avec  $S$  infini (Babai, 1980) ;
- ▶ Tous les groupes infinis de type fini (L.-dIS.).

## Variations sur un thème

### Question (Babai, 1980)

Quels sont les groupes  $G$  de type fini tel qu'il existe  $S$  fini, générateur et tel que  $S \cap S^{-1} = \emptyset$  avec  $G = \text{Aut}(\vec{\text{Cayl}}(G, S))$  ?

- ▶ La condition  $S \cap S^{-1} = \emptyset$  dit que chaque arête ne peut être parcourue que dans un sens, i.e. on n'a pas  ;
- ▶ Si  $G$  est diédral généralisé ( $G = A \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  avec  $A$  abélien), ce n'est pas possible car tout ensemble de générateur contient un élément d'ordre 2 ;
- ▶ Tous les groupes finis non diédral généralisé, sauf 11 exceptions (Morris-Spiga, 2018) ;
- ▶ Tous les groupes infinis de type fini, sauf les diédraux généralisés (L.-dIS.).

## Autres conséquences 1

### Corollaire

*Tout groupe de type fini admet un graphe de Cayley localement fini dont le groupe d'automorphisme est dénombrable (de manière équivalente dont les stabilisateurs des sommets sont finis).*

Cela répond à une conjecture de dLS. et Tessera (2019).

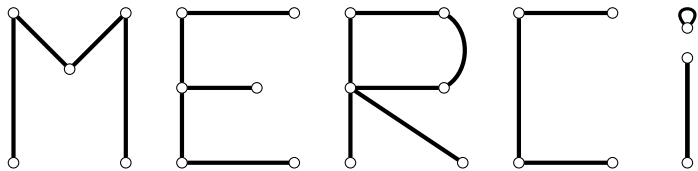
## Autres conséquences 2

Un graphe  $X$  est **LG-rigide** s'il existe un entier  $r$  tel que si  $Y$  est un graphe avec les mêmes boules de rayon  $r$  que  $X$ , alors  $X$  revêt  $Y$ .

### Corollaire

*Tout groupe de présentation finie admet un graphe de Cayley localement fini qui est LG-rigide.*

Un groupe qui n'est pas de présentation finie n'admet aucun graphes de Cayley qui soit LG-rigide (dLS-Tessera, 2019). Ainsi le corollaire ci-dessus donne une caractérisation des groupes de type finis.



MERCI