Graphes de Cayley avec peu d'automorphismes

Paul-Henry Leemann
Université de Neuchâtel

09 avril 2020

Travail en commun avec Mikael de la Salle (ENS Lyon).
Exposé disponible sur
`www.leemann.website/slides/clermont-ferrand.pdf`

Ce dont il est question

Un sujet à l'intersection de

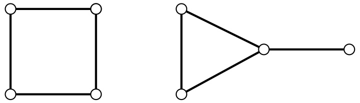
- Théorie géométrique des groupes ;
- Combinatoire et graphes ;
- Probabilités et marches aléatoires.

Représentations graphiques rigides de groupes

- Théorie géométrique des groupes : faire le lien entre des groupes et des espaces géométriques.
- Une représentation du groupe G est un automorphisme $G \to \mathrm{Aut}(V) = \mathrm{GL}(V) = \mathrm{SL}(V) \rtimes K^\times$ où V est un espace vectoriel.
- Plus généralement, on peut regarder $G \to \mathrm{Aut}(X)$ où X est un *espace géométrique avec de bonnes propriétés*.
- Dans notre cas on va s'intéresser à X un graphe rigide et $G \cong \mathrm{Aut}(X)$.

Graphes

- Un graphe X est constitué d'un ensemble V de sommets et d'un ensemble E d'arrêtes.



- Un graphe X est connexe si pour toute paire de sommets (v, w) il existe un chemin reliant v à w.
- Un graphe X est localement fini si tout sommet n'a qu'un nombre fini d'arrêtes adjacentes.

Une première question

Question

Quels sont les groupes G de type fini, tel qu'il existe un graphe X connexe et localement fini avec $G = \mathrm{Aut}(X)$.

- C'est vrai pour tout groupe de type fini [Groot (1959) et Sabidussi (1960)] ;
- Que se passe-t-il si on met plus de structure sur X ?

Graphes réguliers

Définition

L'action de $\mathrm{Aut}(X)$ sur X est régulière si elle est libre et transitive sur les sommets. C'est-à-dire si pour toute paire de sommets (v, w) il existe un unique automorphisme de X envoyant v sur w.

Question principale

Question

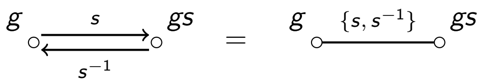
Quels sont les groupes G de type fini, tel qu'il existe un graphe X connexe et localement fini avec $G = \mathrm{Aut}(X)$ agit ***régulièrement*** *sur X.*

- Dans ce cas X est un graphe de Cayley de G [Sabidussi, 1958].
- Résolu dans les années 70 pour les groupes finis [Imrich, Watkins, Nowitz, Hetzel, Godsil...].
- Résolu pour les produits libres de groupes de type fini [Watkins, 1976].
- Résolu [L. - de la Salle] en 2019-2020 pour les groupes infinis de type finis.

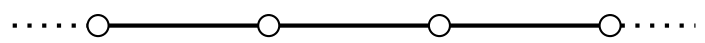
Graphes de Cayley

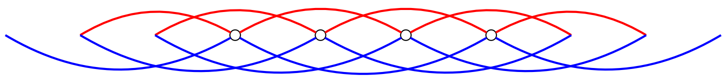
Définition

Soit G un groupe et $S = S^{-1}$ un ensemble de générateurs. Le graphe de Cayley est le graphe avec sommets $V = G$ et avec un arc entre g et gs pour tout $s \in S$:

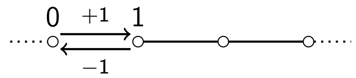


Exemple

- $\mathrm{Cayl}(\mathbf{Z}, \{\pm 1\}) =$ 
- $\mathrm{Cayl}(\mathbf{Z}, \{\pm 2, \pm 3\}) =$



Graphes de Cayley

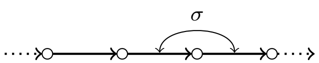
- Chaque arrête est constituée d'une paire d'arcs.
- Chaque arc à une étiquette ($s \in S$).
- La couleur d'une arrête est la paire de ses étiquettes ($\{s, s^{-1}\} \subset S$).
- $\mathrm{Cayl}(\mathbf{Z}, \{\pm 1\}) =$ 

- $G \curvearrowright \mathrm{Cayl}(G, S)$ par multiplication à gauche.
- On a

$$\begin{aligned} G &= \mathrm{Aut}_{\mathrm{et}}(\mathrm{Cayl}(G,S)) \\ &\leq \mathrm{Aut}_{\mathrm{coul}}(\mathrm{Cayl}(G,S)) \\ &\leq \mathrm{Aut}(\mathrm{Cayl}(G,S)) = G \cdot \mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(\mathrm{Cayl}(G,S))}(1). \end{aligned}$$

Example pour $\mathbf{Z}$

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{et}}(\mathrm{Cayl}(\mathbf{Z}, S)) = \mathbf{Z}$$

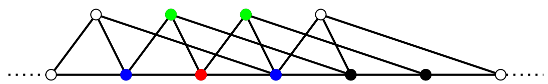


$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{coul}}(\mathrm{Cayl}(\mathbf{Z}, S)) = \mathbf{Z} \rtimes \{1, \sigma\} = D_\infty$$

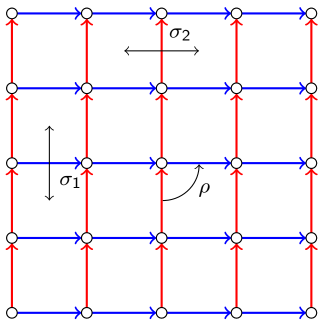
$$\mathrm{Aut}(\mathrm{Cayl}(\mathbf{Z}, S)) = D_\infty$$

Un graphe avec $\mathrm{Aut}(X) = \mathbf{Z}$

On commence avec $X = \mathrm{Cayl}(G, S)$ auquel on ajoute des décorations pour *forcer l'orientation.*



Example pour $\mathbf{Z}^2$



$\mathrm{Aut}_{\mathrm{et}}(\mathrm{Cayl}(\mathbf{Z}^2, S)) = \mathbf{Z}^2$

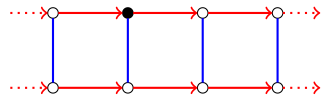
$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}_{\mathrm{cou}}(\mathrm{Cayl}(\mathbf{Z}^2, S)) &= \langle \mathbf{Z}^2, \sigma_1, \sigma_2 \rangle \\ &= \mathbf{Z}^2 \rtimes (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(\mathrm{Cayl}(\mathbf{Z}^2, S)) &= \langle \mathbf{Z}^2, \sigma_1, \sigma_2, \rho \rangle \\ &= \mathbf{Z}^2 \rtimes D_{2\cdot 4}\end{aligned}$$

Exercice : trouver X avec $\mathrm{Aut}(X) = \mathbf{Z}^2$.

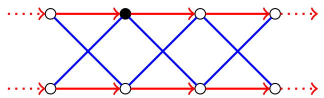
Example pour $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$

$S = \{(\pm 1, 0), (0, 1)\}$



$\mathrm{Stab}_X(1) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$

$S = \{(\pm 1, 0), (\pm 1, 1)\}$



$\mathrm{Stab}_X(1) = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\mathbf{Z}^*} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$

Une dichotomie

- Si X est un graphe de Cayley d'un groupe de type fini, alors $\mathrm{Stab}_X(1)$ est soit fini, soit de la cardinalité du continue.
- Dépend du système de générateur.
- Si G a de la torsion, alors on peut toujours choisir S tel que $\mathrm{Stab}_X(1)$ soit infini.
- Si G a croissance polynomial et sans torsion, alors $\mathrm{Stab}_X(1)$ est fini [Trofimov].

Question principale (bis repetita)

Question

Quels sont les groupes G de type fini tel qu'il existe un ensemble fini de générateurs S avec $G = \mathrm{Aut}(\mathrm{Cayl}(G, S))$?

Lorsque $G = \mathrm{Aut}(\mathrm{Cayl}(G, S))$, on dit que $\mathrm{Cayl}(G, S)$ est une représentation graphique régulière (GRR) et que G est rigide s'il existe un tel S.

- Cela revient à trouver S tel que $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(\mathrm{Cayl}(G,S))}(1)$ est trivial.
- Plus généralement, on peut chercher à minimiser (est-ce que c'est toujours fini ?) la taille de $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(\mathrm{Cayl}(G,S))}(1)$, on parle alors de représentation *la plus rigide possible*.

Groupes non-rigides

Fait

Si G est abélien et est différent de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$, alors il n'est pas rigide. En effet, l'application $g \mapsto g^{-1}$ est dans $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(\mathrm{Cayl}(G,S))}(1)$ pour tout S.

Fait

Si G est un groupe dicyclique généralisé, alors il n'est pas rigide. L'application $a \mapsto a, xa \mapsto a^{-1}x^{-1}$ est dans $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(\mathrm{Cayl}(G,S))}(1)$ pour tout S.
G est dicyclique généralisé s'il n'est pas abélien et $G = A \sqcup xA$ avec A sous-group abélien, x d'ordre 4 et $xax^{-1} = a^{-1}$ pour tout $a \in A$.
Exemple : $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.

Fait

Il existe 13 groupes exceptionnels d'ordre au plus 32 qui ne sont pas rigides (et ni abélien (différent de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}^n$) ni dicyclique généralisé).

Groupes rigides

Théorème (Imrich, Watkins, Nowitz, Hetzel, Godsil..., 1969-1981)

Soit G un groupe fini. Si G n'est ni dicyclique généralisé, ni abélien (différent de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$) ni un des 13 groupes exceptionnels, alors il est rigide.

- Pleins de sous-cas, pas de construction unifiée ;
- Utilise fortement le fait que G est fini (Feit-Thompson, ...).

Théorème (Watkins,1976)

Si $G = G_1 * \cdots * G_n$ est un produit libre de groupes de type finis, alors il est rigide.

Asymptotique

Théorème (Babai-Godsil, 1982)

Si G est un groupe nilpotent, non-abélien, fini d'ordre impaire, alors asymptotiquement presque tous les graphes de Cayley de G sont des GRR.

Résultat principal

Théorème (L. - de la Salle, 2019-2020)

Soit G un groupe infini de type fini. Si G n'est ni dicyclique généralisé ni abélien, alors il est rigide. De plus, pour tout ensemble fini de générateurs S, il existe $S \subset T$ fini tel que $\mathrm{Cayl}(G,T)$ soit un GRR.

- Que deux sous-cas, idée générale commune ;
- Marche aussi pour les groupes finis avec un élément d'ordre *grand*. En particulier, donne que pour tout entier n il y a seulement un nombre fini de groupes de rang n qui sont exceptionnels.
- Une forme faible de comportement asymptotique.

Idée principale

- Rappel :

$$G = \mathrm{Aut}_{\mathrm{et}}(\mathsf{Cayl}(G,S)) \leq \mathrm{Aut}_{\mathrm{coul}}(\mathsf{Cayl}(G,S)) \leq \mathrm{Aut}(\mathsf{Cayl}(G,S)).$$

- En partant de S on va construire T et vérifier séparément que chacune des inégalités ci-dessus est en fait une égalité.

Structure de la preuve

Proposition 1

Soit G un groupe qui n'est ni dicyclique généralisé, ni abélien (différent de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$). Alors pour tout ensemble de générateurs S, il existe $S \subset T$ (fini si S est fini) tel que $\mathrm{Aut}_{\mathrm{coul}}(\mathsf{Cayl}(G,T))$ préserve le S-étiquetage.

Proposition 2

Soit G un groupe infini de type fini. Alors pour tout ensemble fini de générateurs T, il existe $T \subset U$ fini tel que $\mathrm{Aut}(\mathsf{Cayl}(G,U))$ préserve les T-couleurs.

Proposition 3

Soit $S \subset T \subset U$ comme ci-dessus. Alors $\mathsf{Cayl}(G,U)$ est un GRR pour G.

Preuve de la proposition 3

Soit φ un élément de $\mathrm{Aut}(\mathsf{Cayl}(G,U))$. Alors φ appartient à $\mathrm{Aut}_{\mathrm{coul}}(\mathsf{Cayl}(G,T))$ par la proposition 2 et donc aussi à $\mathrm{Aut}_{\mathrm{et}}(\mathsf{Cayl}(G,S))$ par la proposition 1.
C'est-à-dire qu'il existe $g \in G$ tel que pour tout h, on a $\varphi(h) = gh$.

Soit $\overset{h}{\circ}\xrightarrow{u}\overset{hu}{\circ}$ un arc de $\mathrm{Aut}(\mathsf{Cayl}(G,U))$. Alors les sommets sont envoyés par φ sur gh et ghu. Or dans $\mathrm{Aut}(\mathsf{Cayl}(G,U))$ il existe un unique arc entre gh et ghu et il est étiqueté par u.
On a donc montré que φ est dans $\mathrm{Aut}_{\mathrm{et}}(\mathsf{Cayl}(G,U))$.

Esquisse de preuve de la proposition 1

- Soit G un groupe, $S = S^{-1}$ un ensemble de générateurs et $T = (S \cup S^2 \cup S^3) \setminus \{1\}$.
- On regarde le sous-groupe $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}_{\mathrm{coul}}(\mathsf{Cayl}(G,T))}(1)$.
- Ce sont les bijections $\varphi \colon G \to G$ satisfaisant

$$\varphi(1) = 1 \text{ et } \forall g \in G, \forall t \in T, \varphi(gt) \in \varphi(g)\{t, t^{-1}\}$$

- On montre que si H ne fixe pas S, alors G est abélien ou dicyclique généralisé. La preuve est combinatoire et le groupe des quaternions Q_8 joue un rôle important.

Preuve de la proposition 2 : des triangles

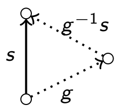
- On va utiliser un invariant géométrique pour différencier une arrête coloriée par $\{s^{\pm 1}\}$ d'un arrête coloriée par $\{t^{\pm 1}\}$: le nombre de triangles auxquelles elles appartiennent.
- Pour $s \in S$, on note $\mathrm{Tr}(s,S)$ le nombre de triangles de $\mathrm{Cayl}(G,S)$ contenant l'arrête $\overset{g}{\circ}\overset{s^{\pm 1}}{\text{———}}\overset{gs}{\circ}$ (ne dépend pas de g).
- On a toujours $\mathrm{Tr}(s,S) = \mathrm{Tr}(s^{-1},S)$.

Preuve de la Proposition 2

- Étant donnée S fini, on va construire $S \subset T$ fini tel que :
  - Pour tout $s \in S$ on a $\mathrm{Tr}(s,T) \geq 7$;
  - Pour tout $t \in T \setminus S$ on a $\mathrm{Tr}(t,T) \leq 6$;
  - Pour tout $s, s' \in S$ on a $\mathrm{Tr}(s,T) = \mathrm{Tr}(s',T)$ si et seulement si $s' = s$ ou $s' = s^{-1}$.
- Pour ce faire, on va montrer un lemme technique qui dit qu'on peut augmenter le nombre de triangles de $s_0 \in S$ sans augmenter le nombre de triangles auquel appartiennent les éléments de $S \setminus \{s_0, s_0^{-1}\}$.
- En appliquant plusieurs fois ce lemme, on a gagné.

Lemme technique

Soit $s \in S$.

- Pour tout $g \in G$, on regarde $S_g = S \cup \{g, g^{-1}, g^{-1}s, s^{-1}g\}$.
- 

- On veut $g \in G$ tel que :
  - On augmente bien les triangles pour s ($\mathrm{Tr}(s,S_g) > \mathrm{Tr}(s,S_g)$) ;
  - $\mathrm{Tr}(g,S_g) \leq 6$ et $\mathrm{Tr}(g^{-1}s,S_g) \leq 6$;
  - On n'augmente pas les triangles pour $t \in S \setminus \{s, s^{-1}\}$.
- Cela nous donne une liste de conditions : $g \notin S$, $s^{-1}g \notin S$, ...

Une condition algébrique

Au final on obtient le critère suivant :
Il existe $F \subset G$ fini tel que si $g, s^{-1}g \notin F$et $g^2, (s^{-1}g)^2 \notin F$, alors S_g marche.
On note $\mathrm{sq} \colon G \to G, g \mapsto g^2$, ainsi $\mathrm{sq}^{-1}(F)$ est l'ensemble des éléments $g \in G$ tel que $g^2 \in F$.

Dichotomie

Pour la suite de la preuve, on a deux cas :

- G a un élément d'ordre infini (ou d'ordre *suffisamment grand*) ;
- G n'est pas virtuellement abélien.

Rappel : G est virtuellement abélien s'il contient un sous-groupe H d'indice fini et abélien. Par exemple, tout groupe fini est virtuellement abélien.
De plus, si G est virtuellement abélien et de type fini, alors il est fini ou a un élément d'ordre infini.

G a un élément d'ordre infini

Soit $g_0 \in G$ d'ordre infini.

- On ne regarde que les éléments de $\langle g_0 \rangle \cong \mathbf{Z} \leq G$.
- Dans $\mathbf{Z}$, chaque élément a au plus une racine carrée.
- Donc il existe une infinité d'éléments g de $\langle g_0 \rangle$ tel que $g, s^{-1}g \notin F$ et $g^2 \notin F$.
- Avec un peu de travail supplémentaire, on obtient le résultat désiré sauf que lorsqu'on augmente les triangles pour s, on peut peut-être aussi augmenter les triangles pour s^2.
- Si on fait attention à dans quel ordre on applique ce lemme, alors ce n'est pas très grave d'augmenter aussi les triangles pour s^2.

G n'est pas virtuellement abélien

Pour G quelconque et $F \subset G$ fini il est possible que $\mathrm{sq}^{-1}(F)$ soit infini ; on ne peut donc pas appliquer la stratégie précédente telle quelle.
Mais on peut montrer

Proposition 4

Soit G un groupe de type fini qui n'est pas virtuellement abélien. Pour tout $s \in G$ et $F \subseteq G$ fini, l'ensemble $G \setminus (\mathrm{sq}^{-1}(F) \cup s\,\mathrm{sq}^{-1}(F))$ est infini.

Corollaire

Soit G un groupe de type fini qui n'est pas virtuellement abélien. Pour tout $s \in G$ et $F \subseteq G$ fini, il existe $g \in G$ tel que

$$g, s^{-1}g \notin F \quad \text{et} \quad g^2, (s^{-1}g)^2 \notin F.$$

Preuve de la proposition 4

Pour montrer la proposition 4, on utilise :

- Si G est de type fini et pour tout $g \in G$ on a $g^2 = 1$, alors G est fini ;
- Un lemme de Dicman sur les sous-groupes normaux ;
- Des marches aléatoires sur les groupes, dont un résultat de Tointon.

Un lemme de Dicman

Lemme (Dicman)

Soit G un groupe et $F \subset G$ fini. Si tout élément de F a ordre fini et si F est invariant par conjugaison, alors le sous-groupe normal $\langle F \rangle^G$ est fini.

Une application du lemme de Dicman

Corollaire

Soit G un groupe de type fini, alors G est infini si et seulement si $\mathrm{sq}(G)$ est fini.

Démonstration.

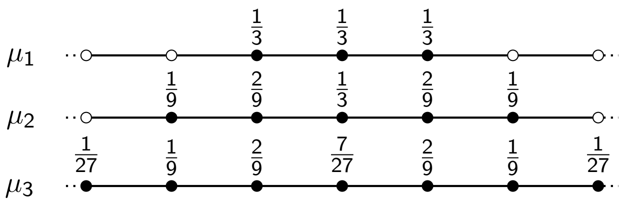
Soit $F = \mathrm{sq}(G)$, c'est un sous-ensemble clos par conjugaison. Si F est fini, alors il ne contient que des éléments d'ordre finis. Le groupe $G/\langle F \rangle^G$ est de type fini et tout ses éléments ont ordre 2, il est donc fini. Mais par Dicman $\langle F \rangle^G$ est fini, et donc G est fini. $\square$

Marches aléatoires sur les sous-groupes

Soit G un groupe de type fini et $S = S^{-1}$ un ensemble fini de générateurs qui contient 1.
Soit μ la probabilité uniforme de choisir un élément de S et $\mu_n = \mu^{*n}$ la marche aléatoire correspondante.

Exemple

$G = \mathbf{Z}$ *et* $S = \{-1, 0, 1\}$



Un théorème de Tointon

Théorème (Tointon, 2020)

Soit G de type fini, $S = S^{-1}$ fini, générateur, qui contient 1 et μ la probabilité uniforme sur S. Soit g_n et h_n deux réalisations indépendantes de μ_n. Si G n'est pas virtuellement abélien,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(g_n \text{ et } h_n \text{ commutent}) = 0$$

Corollaire (L.-dlS.)

Mêmes hypothèses. Si G n'est pas virtuellement abélien, alors

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(g_n^2 = 1) \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Avec plus de travail, on peut montrer la Proposition 4.

Variations sur un thème

On peut se poser la question de ce qui se passe pour les graphes dirigés. Pour $S \subset G$ pas forcément symétrique, on définit $\overrightarrow{\mathrm{Cayl}}(G,S)$ de manière analogue à $\mathrm{Cayl}(G,S)$.

Question

Quels sont les groupes G de type fini tel qu'il existe S fini et générateur avec $G = \mathrm{Aut}(\overrightarrow{\mathrm{Cayl}}(G,S))$?

- Plus facile que de trouver un GRR ;
- Tous les groupes finis, sauf 5 exceptions (Babai, 1980) ;
- Tous les groupes infinis, mais avec S infini (Babai, 1980) ;
- Tous les groupes infinis de type fini (L.-dlS.).

Variations sur un thème

Question (Babai, 1980)

Quels sont les groupes G de type fini tel qu'il existe S fini, générateur et tel que $S \cap S^{-1} = \emptyset$ avec $G = \mathrm{Aut}(\overrightarrow{\mathrm{Cayl}}(G,S))$?

- La condition $S \cap S^{-1} = \emptyset$ dit que chaque arrête ne peut être parcourue que dans un sens, i.e. on n'a pas  ;
- Si G est diédral généralisé ($G = A \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ avec A abélien), ce n'est pas possible car tout ensemble de générateur contient un élément d'ordre 2 ;
- Tous les groupes finis non diédral généralisé, sauf 11 exceptions (Morris-Spiga, 2018) ;
- Tous les groupes infinis de type fini, sauf les diédraux généralisés (L.-dlS.).

Autres conséquences 1

Corollaire

Tout groupe infini de type fini admet un graphe de Cayley X localement fini tel que $|\mathrm{Stab}_X(1)| \leq 2$.

- En particulier, tout groupe de type fini admet un graphe de Cayley dont le groupe d'automorphismes est dénombrable, cela répond à une conjecture de dlS. et Tessera (2019).
- Pour les groupes finis, si $G = Q_8 \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$, alors $|\mathrm{Stab}_X(1)| = 4$, sinon $|\mathrm{Stab}_X(1)| \leq 2$; avec 13 exceptions (d'ordre ≤ 27 et telles que $|\mathrm{Stab}_X(1)| \leq 16$) [..., Morris-Tymburski 2018].

Autres conséquences 2

Un graphe X est LG-rigide s'il existe un entier r tel que si Y est un graphe avec les mêmes boules de rayon r que X, alors X revêt Y.

Corollaire

Tout groupe de présentation finie admet un graphe de Cayley localement fini qui est LG-rigide.

Un groupe qui n'est pas de présentation finie n'admet aucun graphes de Cayley qui soit LG-rigide (dlS-Tessera, 2019). Ainsi le corollaire ci-dessus donne une caractérisation des groupes de type finis.