

Projet de recherche

Paul-Henry Leemann

26 juin 2024

Mes recherches se situent dans le domaine de la théorie géométrique et combinatoire des groupes ainsi qu'en théorie des graphes et en dynamique symbolique. Je suis en particulier intéressé par les phénomènes de rigidité dans les graphes de Cayley et de Schreier, les limites et revêtements de graphes (de Schreier), les groupes agissant sur des arbres enracinés et leurs sous-groupes (faiblement) maximaux, ainsi qu'aux graphes associés à des systèmes dynamiques. De manière générale, les graphes jouent un rôle important dans mes recherches, que ce soit comme sujet d'études ou comme outil.

Certaines des problématiques qui suivent sont plus ou moins directement issues de mes anciens travaux, mais peuvent nécessiter la maîtrise de nouveaux outils, alors que d'autres en sont plus éloignées.

La première des problématiques qui m'intéressent concerne les graphes transitifs infinis ainsi que les revêtement de graphes. La motivation originale de mes recherches vient de la conjecture de Benjamini qui dit essentiellement que tout graphe de Cayley infini revêt proprement un graphe infini transitif. Ce problème peut être découpé en deux sous-problèmes, chacun d'intérêt propre. Comprendre les graphes transitifs infinis et comprendre quels sont les graphes recouvert par un graphe donné. Ces questions peuvent se traduire dans le langage des groupes et mènent naturellement à une version forte de la simplicité qui peut permettre de mieux comprendre la structure des groupes infinis simples.

Un deuxième thème de recherche qui me tient à cœur est l'étude du groupe des automorphismes des graphes de Cayley. Une des questions principales ici est, étant donné un groupe G , de trouver si possible un ensemble de générateur S tel que les seuls autormorphismes de $\text{Cay}(G, S^\pm)$ soient les translations par les éléments de G . Si la situation est totalement comprise pour les groupes finis depuis le début des années 1980, ce n'est que récemment qu'avec Mikael de la Salle nous avons décrit se qui se passe pour les groupes de type fini. La prochaine étape consiste à regarder les groupes dénombrables, puis les groupes quelconques.

Les graphes de Rauzy associé à un sous-décalage et leurs limite sont une autre thématique qui m'intéresse. Avec mes co-auteurs nous avons par le passé traité le cas du décalage complet, ainsi que des sous-décalages de complexité sous-exponentiels. Le cas général reste encore à étudier.

Le dernier axe de recherche que je développe ici est celui de l'étude des sous-groupes des groupes branchés. Il s'agit notamment d'étudier les sous-groupes fermés dans la topologie profinie ainsi que les sous-groupes auto-commensurant. Les premiers sont utiles pour des questions de décidabilité, alors que les seconds permettent de construire des représentations irréductibles.

Bien que les sujets présentés ici soient distincts, certains thèmes et techniques sont transversaux à leur étude. C'est par exemple le cas des graphes de Schreier et de leurs géométries, des groupes juste infinis ou encore du treillis des sous-groupes et ses éléments distingués.

Table des matières

1	Graphes de Cayley avec peu d'automorphismes	3
2	Revêtements de graphes transitifs et simplicité forte des groupes	5
3	Limites de graphes associés à un sous-décalage	7
4	Sous-groupes fermés des groupes branchés	10
5	Sous-groupes auto-commensurants des groupes branchés	15

1 Graphes de Cayley avec peu d'automorphismes

Soit G un groupe et S un système de générateur. On peut associer au couple (G, S) son graphe de Cayley $\text{Cay}(G, S^\pm)$. Les sommets de $\text{Cay}(G, S^\pm)$ sont les éléments de G et il y a une arête entre g et h si et seulement si $g^{-1}h$ ou $h^{-1}g$ est dans S . Cette construction est bien connue et permet de voir G comme un espace métrique. Le groupe G agit sur $\text{Cay}(G, S^\pm)$ par multiplication à gauche, ce qui donne donc une injection de G dans le groupe $\text{Aut}(\text{Cay}(G, S^\pm))$ des automorphismes de $\text{Cay}(G, S^\pm)$. Si cette injection est en fait une égalité, on dit que $\text{Cay}(G, S^\pm)$ est une *représentation graphique régulière* de G . Un groupe G est *rigide* s'il admet une telle représentation. Une simple vérification montre que les groupes abéliens (d'exposant au moins 3) ne sont pas rigides. En effet, $g \mapsto g^{-1}$ est toujours un élément de $\text{Aut}(\text{Cay}(G, S^\pm)) \setminus G$. On peut aussi facilement montrer que les groupes dicycliques généralisés ne sont pas rigides. Finalement, il existe 13 groupes finis d'ordre au plus 32 qui ne sont pas rigides. On a la conjecture suivante formulée par Watkins en 1976.

Conjecture 1 ([Wat76]). *En dehors des exemples sus-mentionnés, tout groupe est rigide.*

Les efforts combinés de nombreux mathématiciens ont permis de résoudre cette conjecture pour les groupes finis entre 1969 et 1978 [Imr69 ; ER70 ; Wat71 ; NW72 ; Wat72 ; Wat74 ; Imr75 ; IW76 ; Het76 ; God81]. Avec de la Salle, nous avons récemment résolu la conjecture pour les groupes infinis de rang finis [LS21 ; LS22a]. En dehors de cela, la conjecture est aussi connue pour les produits libres d'un nombre dénombrable de groupes [Wat76].

Il reste encore à traiter le cas général, c'est-à-dire le cas des groupes de rang infini. Pour ce faire, il semble prometteur de combiner les résultats de [LS21] à ceux de [Bab78]. En effet, dans [LS21] nous exprimons la rigidité d'un groupe comme la conjonction de deux propriétés que nous appelons être *orientation-rigide* et être *couleur-rigide*. De plus, nous montrons qu'un groupe (pas nécessairement de rang fini) est couleur-rigide si et seulement si il n'est ni abélien ni dicyclique généralisé. Ainsi, les résultats principaux de [LS21 ; LS22a] consiste à montrer que pour tout groupe de rang fini G , d'un part si G n'est pas abélien ni dicyclique généralisé alors pour tout système de générateur fini S il existe $S \subset T$ fini tel que $\text{Cay}(G, T^\pm)$ soit orientation rigide et d'autre par pour tout T générateur fini il existe $T \subset U$ fini tel que $\text{Cay}(G, U^\pm)$ soit couleur-rigide. La conjonction de ces deux résultats démontrant que $\text{Cay}(G, U^\pm)$ est une représentation graphique régulière pour G . Il s'ensuit des méthodes de [LS21] que répondre positivement à la question suivante démontre la conjecture 1.

Question 2. *Soit G un groupe et S un système de générateur. Est-ce qu'il existe toujours $S \subset T$ tel que $\text{Cay}(G, T^\pm)$ soit orientation-rigide ?*

Or, les travaux de Babai sur les graphes de Cayley dirigés [Bab78] montrent essentiellement que pour G un groupe on peut toujours trouver T tel que $\text{Cay}(G, T^\pm)$ soit orientation-rigide. Bien que la preuve de Babai ne répondent pas directement à la question 2, il est raisonnable de vouloir l'adapter pour parvenir à nos fins.

Afin de résoudre la conjecture 1 pour les groupes dénombrables nous nous proposons de remplacer *système de générateur fini* par « petit » *système de générateur*. Il nous faut donc démontrer

Conjecture 3. *Soit G un groupe infini. Alors*

1. *G possède un « petit » système de générateur S ,*
2. *Si G n'est ni abélien ni dycyclique généralisé, alors pour tout « petit » système de générateur S , il existe un « petit » système de générateur $S \subset T$ tel que $\text{Cay}(G, T^\pm)$ est orientation rigide,*
3. *Pour tout « petit » système de générateur T il existe un « petit » système de générateur $T \subset U$ tel que $\text{Cay}(G, U^\pm)$ soit couleur-rigide.*

Pour que cette conjecture fasse sens, il faut définir précisément ce que l'on entend par petit. Pour les groupes dénombrables, nous proposons de définir S est « petit » comme synonyme de *dans le graphe de Cayley $\text{Cay}(G, S^\pm)$, chaque arête appartient uniquement à un nombre fini de triangles.*

Dans ce contexte, je peux en effet démontrer

Lemme 4. *Tout groupe dénombrable G possède un système de générateur S tel que chaque arête de $\text{Cay}(G, S^\pm)$ appartient à au plus un nombre fini de triangles.*

Néanmoins, cela n'est pas suffisant pour démontrer la conjecture 1 pour les groupes dénombrables. Il est cependant possible d'obtenir T tel que $\text{Cay}(G, T^\pm)$ est orientation rigide si on part d'un S petit satisfaisant certaines propriétés combinatoires supplémentaires (comme par exemples $xyz \neq 1$ pour tout triplet d'éléments dans S). Si démontrer l'existence d'un tel S requiert a priori des arguments combinatoires plus complexes que pour le lemme 4, il reste raisonnable d'espérer y parvenir, notamment en adaptant des idées de Babai [Bab78].

Finalement, pour le troisième point de la conjecture 3 je prévois de faire une dichotomie en fonction de si G est virtuellement abélien ou non. Le cas G où est un groupe virtuellement abélien dénombrable est se fait en deux étapes. La première étape consiste à traiter le cas abélien. Plus précisément, je prévois de démontrer

Conjecture 5. *Soit H un groupe abélien dénombrable. Alors il existe un petit système de générateur S tel que $[\text{Aut}(\text{Cay}(H, S^\pm)) : H] \leq 2$.*

Avec M. de la Salle, nous avons récemment fini de démontré cette conjecture pour les groupes de rang fini [LS22b]. Le cas H dénombrable semble faisable même si plus complexe. En effet, il est bien connu qu'un groupe abélien dénombrable possède un élément d'ordre infini ou est une somme directe $\bigoplus_p A_p$ où les A_p sont des p -groupes abéliens, p premier. De plus, chaque A_p se décompose en somme directe d'un Je suis capable de montrer :

Proposition 6. *Soit H un groupe abélien dénombrable satisfaisant une des conditions ci-dessous :*

1. *H a un élément d'ordre infini,*

2. $H = \bigoplus_p A_p$ avec un nombre infini de facteurs non-triviaux.

Alors il existe un petit système de générateur S tel que $[\text{Aut}(\text{Cay}(H, S^\pm)) : H] \leq 2$.

En fait, actuellement le seul cas non-encore démontré qui demande du travail est le cas où $H = A_p$ est un p -groupe abélien réduit sans éléments de p -hauteur infinie. Une fois la conjecture 5 démontrée, je prévois de l'utiliser pour prouver le cas virtuellement abélien. En effet, si G est virtuellement abélien dénombrable, alors il contient un sous-groupe abélien dénombrable H et un sous-ensemble fini T tel que $G = \langle T, H \rangle$. En combinant les résultats sur les groupes abéliens dénombrables et sur les groupes finis on devrait ainsi pouvoir démontrer la conjecture 1 pour les groupes virtuellement abéliens dénombrables.

Il nous reste maintenant à s'occuper du cas non-virtuellement abélien. L'idée ici est d'utiliser les récents résultats de [LS22a] qui utilisent les marches aléatoires et notamment des idées de Tointon [Toi20] sur les probabilités de commutations dans des groupes infinis. Essentiellement, les résultats de Tointon nous donnent des informations lorsqu'un élément est choisi au hasard en fonction d'une marche aléatoire sur le graphe de Cayley d'un groupe de rang fini. Si G est de rang fini, il n'est plus possible de choisir uniformément au hasard un voisin d'un sommet du graphe de Cayley. Néanmoins, il est possible de contourner ce problème de la manière suivante. Soit $S = \{s_1, s_1^{-1}, s_2, s_2^{-1}, \dots\}$ un système de générateur de G et soit μ_n la mesure uniforme sur $\{1, s_1^{\pm 1}, s_2^{\pm 1}, \dots, s_n^{\pm 1}\}$. On regarde alors la séquence de variables aléatoires (X_n) de loi (μ_n^{*n}) . Si S est fini, alors pour $n > |S|$ il s'agit de la marche aléatoire paresseuse classique. Si S est infini, ce n'est plus une marche aléatoire mais cela s'en rapproche néanmoins par certains comportements. En général, la séquence de mesure (μ_n^{*n}) ne satisfait pas toutes les hypothèses utilisées par Tointon dans [Toi20], il est donc peu probable de pouvoir généraliser ses résultats. Néanmoins, dans le cas de rang fini, les résultats de Tointon sont beaucoup plus forts que nécessaire pour démontrer la conjecture 1 et il est possible qu'une version édulcorée de ceux-ci soit suffisante pour notre propos.

Notons aussi que des variations de la conjecture 1 pour les groupes finis ont attiré beaucoup d'attention ces cinq dernières années. Certaines de ces variations se prêtent bien à être étudiées dans le cadre infini. Nous en citerons une seule ici.

Question 7. *Étant donné G , existe-il un graphe X tel que $G = \text{Aut}(X)$, G agit transitivement sur les sommets de X , tout élément non-trivial de G fixe au plus un sommet et il existe un élément non-trivial de G fixant un sommet.*¹

Nous espérons qu'un mélange des arguments de [LS21] et de [DTW18] puisse permettre d'aborder ce problème.

2 Revêtements de graphes transitifs et simplicité forte des groupes

Les graphes de Schreier $\text{Sch}(G, H, S^\pm)$, pour $H \leq G$, sont une généralisation naturelle des graphes de Cayley. Les sommets sont les classes à droites Hg et il y a une arête entre

1. Dans ce cas on dit que X est une représentation graphique de Frobenius.

Hg et Hh si et seulement si $g^{-1}Hh$ intersecte $S \cup S^{-1}$. On a donc une identification naturelle entre $\text{Cay}(G, S^\pm)$ et $\text{Sch}(G, \{1\}, S^\pm)$. L'étude des graphes de Schreier est notamment intéressante dans le contexte des graphes transitifs, c'est-à-dire des graphes dont le groupe d'automorphismes agit transitivement sur les sommets. En effet, tout graphe de Cayley est transitif et tout graphe transitif est isomorphe à un graphe de Schreier [GR01 ; Lee16a]. D'autre part, un critère de transitivité pour $\text{Sch}(G, H, S^\pm)$ est donnée dans [Lee16b]. Si N est un sous-groupe normal, alors $\text{Sch}(G, N, S^\pm)$ est isomorphe à $\text{Cay}(G/N, S^\pm)$ et est donc transitif. Par analogie, nous appellerons faiblement normal un sous-groupe H tel que $\text{Sch}(G, H, S^\pm)$ est transitif.

Nous dirons qu'un groupe est fortement simple s'il ne possède pas de sous-groupe (propre et non-trivial) faiblement normal. Il est évident qu'un groupe cyclique d'ordre premier est fortement simple et que tout groupe fortement simple est simple. D'autre part, dans [Lee16b] nous montrons que les monstres de Tarski sont fortement simple, mais que les groupes alternés finis ne le sont pas. On peut donc se demander

Question 8. *Existe-t-il des groupes finis fortement simples ? Et des groupes infinis simples, mais non fortement simples ?*

Nous noterons au passage qu'être fortement simple a des répercussions sur les graphes revêtus par $\text{Cay}(G, S^\pm)$. En effet, si G est fortement simple et $\text{Cay}(G, S^\pm)$ est une représentation graphique régulière, alors il découle de [Lee16b ; LS21] que pour presque tout revêtement $\varphi: \text{Cay}(G, S^\pm) \twoheadrightarrow \Delta$, le graphe Δ n'est pas transitif. Ce phénomène répond partiellement à une question de Benjamini. On peut espérer qu'avoir d'autres exemples de groupes fortement simple permettent de remplacer le « presque tout revêtement » dans l'assertion ci-dessus par « tout revêtement ».

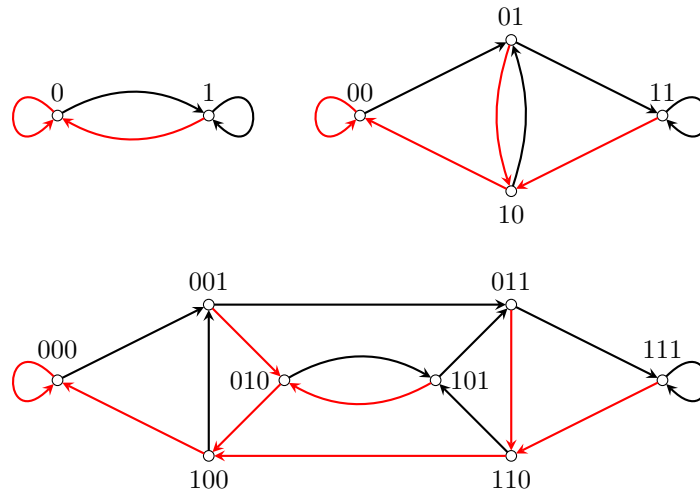
On peut aussi se poser la question de la structure de l'ensemble de sous-groupes faiblement simples. En effet, il est bien connu que si M et N sont deux sous-groupes normaux, alors $M \cap N$ et $\langle M \cup N \rangle$ sont aussi normaux. En d'autres termes, l'ensemble des sous-groupes normaux de G est un sous-treillis de l'ensemble des sous-groupe de G .

Question 9. *L'ensemble des sous-groupes faiblement normaux de G est-il clos par intersection et par union ?*

Il suit de [Lee16a] que l'ensemble des sous-groupes faiblement normaux est stable par intersection. Il reste donc à traiter la question de l'union. Autrement dit, étant donnée H et K tel que $\text{Sch}(G, H, S^\pm)$ et $\text{Sch}(G, K, S^\pm)$ sont transitifs, le graphe $\text{Sch}(G, \langle H \cup K \rangle, S^\pm)$ est-il lui aussi transitif ?

En parlant de treillis, remarquons que les propriétés suivantes admettent une caractérisation en terme de treillis : être simple, être un monstre de Tarski, être un sous-groupe normal. On peut donc se demander si les propriétés d'être un sous-groupe faiblement normal ou d'être fortement simple sont elles aussi caractérisables en terme de treillis.

Finalement, et comme remarqué dans [LLR18], il pourrait être intéressant de généraliser les méthodes de [Lee16b] au cas des complexes simpliciaux.

FIGURE 1 – Graphes de Bruijn $\vec{\mathcal{B}}_{2,1}$, $\vec{\mathcal{B}}_{2,2}$ and $\vec{\mathcal{B}}_{2,3}$.

3 Limites de graphes associés à un sous-décalage

L'étude des limites des graphes finis est un sujet de grand intérêt tant pour les théoriciens des graphes que pour les probabilistes et les dynamiciens, avec des liens avec la physique statistique. Un des outils de bases dans ce domaine est la notion de limite de Benjamini-Schramm, introduite dans [BS01]. On définit la limite d'une séquence de graphes finis comme la limite faible (dans l'espace des mesures sur les graphes enracinés) des mesures sur les graphes finis consistant à choisir uniformément la racine.

Une fameuse séquence de graphes finis est celle des graphes de Bruijn — des graphes orientés représentant les recouvrements dans les séquences de symboles sur un alphabet fini. Les sommets de $\vec{\mathcal{B}}_{k,n}$ sont les séquences de n lettres sur l'alphabet $\{0, \dots, k-1\}$ et pour tout sommet $v = x_1 \dots x_n$ et tout a dans l'alphabet, il existe exactement une arête étiquetée par a partant de v , son sommet final étant $x_2 \dots x_n a$. Les graphes de Bruijn et leur généralisations (graphes toiles d'araignées et graphes de Rauzy) sont des objets de grand intérêt mathématiques qui possèdent aussi de nombreuses applications dans des domaines divers. D'une part, d'un point de vue mathématique ils encodent dans des objets finis le comportement de sous-décalage et sont donc intéressants à la fois pour la combinatoire et la dynamique (symbolique). Ils possèdent aussi de bonnes propriétés de connectivités et de remarquables propriétés de percolations [Pip91 ; Pip92 ; Pip06] et spectrales. Finalement, ils sont reliés au groupe de l'allumeur de réverbères. D'autres part, les propriétés de ces graphes les rendent fort utiles pour les applications. Par exemple, les graphes toiles d'araignées ont été introduits par Ikeno en 1959 [Ike59] afin d'étudier les systèmes de switches téléphoniques. Ils sont aussi importants en physique statistique [BD12]. Les graphes de Rauzy quand à eux sont utilisés de manière intensive en bio-informatique pour encoder les séquences génomiques [Iqb+12].

Pour k fixé, les graphes de Bruijn forment une famille infinie dont le nombre de sommet

est croissant, il est donc intéressant d'étudier les propriétés asymptotiques de cette famille. Un argument de plus pour l'étude de cette limite est l'article [BD12] des physiciens Balram et Dhar. En effet, ils y calculent les mesures spectrales des graphes toiles d'araignées et remarquent qu'elles convergent vers une distribution discrète. La distribution discrète de la mesure spectrale est un phénomène rare qui n'était connu jusqu'ici, pour les graphes de Cayley, uniquement pour le groupe de l'allumeur de réverbères. Il est donc naturel de demander si ce comportement est une coïncidence ou le signe de quelque chose de plus profond. Dans [GLN16], avec Grigorchuk et Nagnibeda nous montrons que la limite de $(\vec{B}_{k,n})_n$ (et plus généralement des graphes toiles d'araignées) est isomorphe (en tant que graphe non-étiqueté) au graphe de Cayley du groupe de l'allumeur de réverbère $\mathcal{L}_k$ ², ce qui implique la convergence des mesures. Ce dernier graphe est lui-même connu pour être le produit horocyclique, $DL(k, k)$, de deux arbres (non enracinés) $k + 1$ réguliers.

Ces résultats nous ont permis avec Nagnibeda de calculer la fonction zeta spectrale de $DL(k, k)$ (reliée à la complexité des graphes de Bruijn) et d'obtenir en particulier

$$\zeta'_{DL(k,k)}(0) = (k-1)^2 \frac{d}{ds} \text{Li}_s\left(\frac{1}{k}\right) \Big|_{s=0} - \log(k)$$

Or, le polylogarithme satisfait, pour tout s avec $\Re(s) > 1$, $\text{Li}_s(1) = \zeta(s)$ où ζ est la fonction zeta de Riemann. D'autre part, Friedli et Karlsson ont montré dans [FK17] que pour les cycles finis on a l'asymptotique³ $\zeta_{C_n}(s) = \zeta_{\mathbf{Z}}(s)n + 2\zeta(2s)\left(\frac{n}{2s}\right)^{2s} + o(n^{2s})$. On se pose alors la question de la relation exacte entre les fonctions zetas spectrales, et la fonction zeta de Riemann. Plus précisément

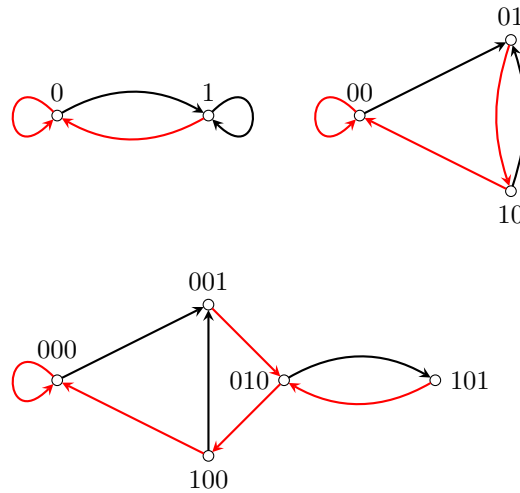
Question 10. *Quelle est la relation exacte entre $\zeta_{DL(k,k)}$ et $\text{Li}_s\left(\frac{1}{k}\right)$?*

On peut se poser la question de la généralisation des résultats présentés ci-dessus. Il se trouve que les graphes de Bruijn sont un cas particulier de *graphes de Rauzy*. D'un point de vue pragmatique, étant donné un ensemble F de mots interdits sur l'alphabet $\{0, \dots, k-1\}$, on définit le graphe de Rauzy $R_{k,n,F}$ comme le sous-graphe de $\vec{B}_{k,n}$ obtenu en enlevant tous les sommets correspondants à des mots contenant des éléments de F comme sous-mot. Ainsi, pour $k = 1$ et $F = \{11\}$ on ne garde comme sommets que les mots ne contenant pas la séquence 11. D'un point de vue plus théorique, les graphes de Rauzy correspondent à un sous-décalage sur $\mathbf{Z}$ là où les graphes de Bruijn correspondaient au décalage complet. Outre leur intérêt mathématique propre, les graphes de Rauzy sont beaucoup utilisés en biologie pour classifier des séquences d'ADN.

Dans ce cadre plus général, j'ai montré dans ma thèse que pour les sous-décalages de type finis et sous certaines hypothèses techniques, les graphes de Rauzy $R_{k,n,F}$ ont pour limite une mesure μ_F supportée sur des produits horocycliques d'arbres. En général, les arbres considérés ne sont plus réguliers, mais on a néanmoins une description explicite de ceux-ci qui ne dépend que de F . Les hypothèses techniques sus-mentionnées apparaissent

2. Ceci pour le système de générateur venant de la description comme groupe d'automate de $\mathcal{L}_k$, et non pas pour le système de générateur associé à sa structure de produit en couronne. Notons au passage que la preuve de [GLN16] utilise l'action de $\mathcal{L}_k$ sur un arbre enraciné, un thème récurrent de ce projet

3. pour $\Re(s) < 1/3$

FIGURE 2 – Graphes de Rauzy $R_{2,1,\{11\}}$, $R_{2,2,\{11\}}$ et $R_{2,3,\{11\}}$.

plus comme des artefacts des techniques de preuves que comme une limite de la théorie. On a ainsi

Conjecture 11. *Pour un sous-décalage de type fini, la limite des $R_{k,n,F}$ existe toujours. C'est une mesure supportée sur des produits horocycliques d'arbres.*

Rappelons que les limites de Benjamini-Schramm sont toujours des graphes unimodulaires et que $DL(k, l)$ est unimodulaire si et seulement si $k = l$. En particulier, μ_F ne peut pas être égale à $DL(k, l)$ pour $k \neq l$. D'autre part, il n'existe qu'un nombre dénombrable de sous-décalages de types finis, mais un continuum de mesures unimodulaires supportées sur des produits horocycliques, [KS12]. Ceci nous mène naturellement à formuler

Problème 12. *Décrire les mesures unimodulaires supportées sur des produits horocycliques apparaissant comme limite de graphes de Rauzy.*

Comme réponse à ce problème, Kaimanovich a formulé la conjecture suivante

Conjecture 13. *Pour tout F , la limite μ_F des graphes de Rauzy $(R_{k,n,F})_n$ est l'image de la mesure μ d'entropie maximal sur le sous-décalage par une certaine fonction Φ .*

Ici, l'entropie d'une mesure invariante par décalage est son entropie topologique. Si le sous-décalage est irréductible, alors il existe une unique entropie invariante maximale μ , [Kit98]. Dans un projet commun avec Kaimanovich et Nagnibeda, nous prévoyons de démontrer la conjecture 13 pour F fini (i.e. pour les sous-décalage de rang fini). Une fois ceci fait, l'étape suivante consistera à calculer le spectre de ces graphes et leur limite. Cette partie s'appuie sur les résultats déjà obtenus dans ma thèse et se base notamment sur le théorème de Perron-Frobenius. Les méthodes employées utilisent donc fortement le fait que le sous-décalage est de rang fini.

À l'opposé des sous-décalages de rang fini, se trouve les sous-décalages de complexité sous-exponentiels. Ici Perron-Froebinius n'est plus disponible, mais la combinaison d'arguments dynamiques et géométriques permet de montrer que ces graphes sont suffisamment clairsemés, ce qui dans notre cas est suffisant pour calculer la limite. Ainsi dans le récent article [Lee+24] nous montrons avec mes collègues que pour un sous-décalage de complexité $p(n)$ sous-exponentielle la limite des graphes de Rauzy existe si et seulement si $\lim_n \frac{p(n+1)}{p(n)} = 1$, auquel cas la limite des R_n est égal à $\mathbf{Z}$. Cette dichotomie laisse ouverte le cas des sous-décalages de complexité exponentielles qui ne sont pas de rang finis. Pour ce dernier cas de nouvelles idées seront nécessaires, et il est possible que l'entropie joue un rôle important.

Finalement, je compte m'intéresser à

Problème 14. *Généraliser les résultats précédant pour des graphes correspondant à des sous-décalages sur $\mathbf{Z}^d$ et de manière plus générale à des sous-décalage pour un groupe G .*

4 Sous-groupes fermés des groupes branchés

Ce projet se situe à l'intersection de trois importants thèmes en théorie géométrique des groupes : les groupes branchés, les groupes auto-similaires et finalement la topologie profinie et les groupes (localement) résiduellement finis étendus.

Un groupe est *juste infini* s'il est infini et si tout ses quotients sont finis. Pour un groupe infini, il s'agit d'un relâchement de la condition de simplicité : on admet des quotients non-triviaux, mais seulement s'ils sont finis, et donc dans un certain sens triviaux du point de vue de la théorie géométrique des groupes. Cette condition est à la fois naturelle du point de vue de la géométrie à large échelle, et utile en pratique puise tout groupe infini de rang fini admet un quotient juste infini. Une découverte majeure de Wilson dans les années 1970 (raffinée plus tard par Grigorchuk) est que la classe des groupes juste infini se sépare en trois sous-catégories qui sont, essentiellement, les groupes simples, les groupes héréditairement juste infini (tous les sous-groupes d'indice fini de G sont juste infini ; comme $SL(n, \mathbf{Z}), n \geq 3$) et les groupes branchés juste infinis. Les groupes dans cette dernière catégorie sont des exemples de groupes agissant fidèlement sur des arbres enracinés et son caractérisés par une structure de sous-groupes très riche, malgré le fait qu'ils soient juste infinis. Un exemple marquant d'un tel groupe est le premier groupe de Grigorchuk $\mathcal{G}$ qui a été le premier exemple connu de groupe de croissance intermédiaire et donc le premier exemple de groupe moyennable mais non élémentairement moyennable, [Gri80 ; Gri84]. Les groupes auto-similaire apparaissent eux naturellement en dynamique [Nek05] et sont des exemples de groupes d'automates. Bien que ces deux classes soient différentes, leur intersection est non-vide et contient de nombreux exemples intéressants, dont $\mathcal{G}$. Les groupes branchés auto-similaire sont une source importante d'exemples exotiques et de contre-exemples en théorie géométrique des groupes, et leur étude a suscité beaucoup d'intérêts ces vingt dernières années. Ainsi, la classe des groupes branchés auto-similaire de rang fini contient des exemples de groupes de torsion et de groupes sans torsion, de groupes de croissances intermédiaire et de groupes de croissance exponentielle, de groupes moyennables et de de groupes non-moyennables.

Un autre sujet d'intérêt en théorie géométrique des groupes est la topologie profinie. Celle-ci est la topologie sur G engendrée par les sous-groupes d'indice fini (et leurs translatés). Un groupe G est *résiduellement fini* si le sous-groupe trivial est fermé pour la topologie profinie. Les groupes résiduellement finis sont une généralisations des groupes finis et sont donc un objet d'étude intéressant. Ils possèdent de nombreuses caractérisations dont certaines sont évoquées ci-dessous.

Fait 15. *Soit G un groupe. Sont équivalent*

1. G est résiduellement fini,
2. la topologie profinie sur G est séparée (Hausdorff),
3. l'intersection de tout les sous-groupes normaux d'indice fini de G est triviale,
4. Pour tout élément $g \neq 1$, il exist un quotient fini $\pi: G \twoheadrightarrow H$ tel que $\pi(g) \neq 1$,
5. G s'injecte dans sa complétion profinie,
6. (si G est de rang fini) G est un sous-groupe de $\text{Aut}(T)$ où T est un arbre enraciné.

Il est évident que pour tout groupe G , les sous-groupes d'indice fini sont fermés (pour la topologie profinie) et que si G est résiduellement fini, alors les sous-groupes finis sont eux aussi fermés. Étant donné un groupe G , on peut donc poser la question suivante :

Question 16. *Quels sont les sous-groupes fermés (pour la topologie profinie) de G ?*

Si tous les sous-groupes de G sont fermés, on dira que G est *résiduellement fini étendu* (ou *ERF* d'après l'acronyme anglais), alors qu'on dira que G est *localement résiduellement fini étendu* (*LERF*) si tous ses sous-groupes de rang fini sont fermés.

Bien que la classe des groupes résiduellement finis contiennent de nombreux exemples bien connus et possède plusieurs jolies caractérisations, ce n'est pas le cas des groupes LERF et ERF. Comme exemples connus de groupes ERF, il y a entre autre les groupes finis, les groupes abéliens de rang fini et les groupes virtuellement polycyclique [Mal58]. Notons aussi [RRV09] qui se concentre sur les groupes nilpotents. Comme exemples de groupes LERF, il y a bien entendu tous les groupes ERF ainsi que les groupes libres de rang fini, les groupes de surfaces et plus généralement les groupes limites [Wil08]. D'autre part, dans un groupe libre un produit $\prod_{i=1}^n H_i$ d'un nombre fini de sous-groupes de rang fini est fermé. Cette propriété remarquable est connue (pour les groupes de rang fini) uniquement pour les groupes libres et quelques généralisations triviales.

Les groupes branchés étant par définition des sous-groupes de $\text{Aut}(T)$, où T est un arbre enraciné, ils sont résiduellement finis. On peut donc se poser les questions suivantes.

Question 17. *Soit $\mathcal{G}$ le premier groupe de Grigorchuk. Est-il possible de décrire tous ses sous-groupes fermés ?*

Question 18 ([GN08]). *Soit H_1 to H_n des sous-groupes de rang fini de $\mathcal{G}$. Est-ce que le sous-ensemble $\prod_{i=1}^n H_i$ est fermé pour la topologie profinie ?*

Et plus généralement :

Question 19. *Quels sont les groupes branchés qui sont LERF ?*

Certains résultats partiels sont déjà connus. Ainsi, tous les sous-groupes maximaux de $\mathcal{G}$ sont d'indice fini et donc fermés, [Per00]. Par [GW03], si G est un groupe branché auto-similaire dont les sous-groupes maximaux sont d'indice fini, alors les sous-groupes faiblement maximaux (i.e. maximaux parmi les sous-groupes d'indice infinis) sont eux aussi fermés. Ce résultat s'applique en particulier à $\mathcal{G}$. Finalement, il suit de [GW03] que le premier groupe de Grigorchuk est LERF. L'on sait aussi que $\mathcal{G}$ n'est pas ERF car il contient des sous-groupes isomorphes à $\bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{Z}/2^n \mathbb{Z}$ qui n'est pas ERF.

En fait, il ressort de la série d'articles [Lee24 ; GLN21 ; FL24] que la bonne propriété à étudier est celle d'*induction des sous-groupes*. En effet, nous avons

Théorème 20 ([Lee24 ; GLN21 ; FL24]). *Soit G un groupe de rang fini, branché, auto-similaire et avec la propriété d'induction des sous-groupes. Alors*

1. G est de torsion et juste infini,
2. Si G est un p -groupe, alors tous les sous-groupes faiblement maximaux de G sont d'indice fini (et donc fermés),
3. G est LERF,
4. tous les sous-groupes faiblement maximaux de G sont fermés,
5. $H \leq G$ est de rang fini si et seulement si il existe un sous-groupe à bloc $L \leq H$ tel que l'indice $[H : L]$ soit fini.

De plus, pour G de rang fini, branché et auto-similaire, le point 5 est en fait équivalent à la propriété d'induction des sous-groupes

Nous ne donnerons pas ici de définitions explicites (cf. [Lee24 ; GLN21 ; FL24]) de la propriété d'induction des sous-groupes ou des sous-groupes à blocs, mais nous allons en expliciter quelques aspects. Tout d'abord, heuristiquement un sous-groupe à blocs de G est un sous-groupe isomorphe à un produit de sous-groupes d'indice fini de G , certains inclus diagonalement ; les figures 3 et 4 pourront éventuellement aider à se faire une idée. En particulier, la description d'un sous-groupe à bloc fait intervenir un nombre fini de sommets de T .

Dans un projet en cours avec Francoeur, Grigorchuk et Nagnibeda nous prévoyons, entre autres, d'améliorer le point 5 du théorème 20 pour le cas particulier de $\mathcal{G}$. Le but étant de remplacer les sous-groupes d'indice fini quelconque apparaissant dans la définition des sous-groupes à blocs par un unique sous-groupe K (d'indice 16).

Conjecture 21. *Soit $\mathcal{G} = \langle a, b, c, d \rangle$ le premier groupe de Grigorchuk et K la clôture normal de $\langle a, b \rangle$.⁴ Soit H un sous-groupe de rang fini de $\mathcal{G}$. Alors il existe un sous-groupe à bloc $L \leq H$ dont tous les blocs sont K et tels que $[H : L]$ soit fini.*

La structure générale de la preuve de la conjoncture 21 est relativement clair. L'idée principal est de montrer que si H est un sous-groupe de $\mathcal{G}$ qui est abstraitement isomorphe

4. C'est un sous-groupe d'indice 16, et aussi le plus grand sous-groupe sur lequel $\mathcal{G}$ est branché.

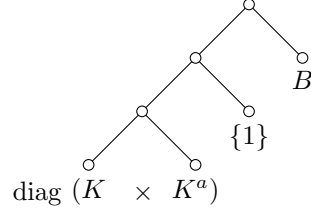


FIGURE 3 – Un sous-groupe à bloc du premier groupe de Grigorchuk. B et K sont des sous-groupes d'indice fini (8 et 16) de $\mathcal{G}$. Ici B sous le sommet de droite signifie que l'on considère les éléments de $\text{Aut}(T)$ fixant ce sommet v , agissant comme un élément de B sous le sous-arbre enraciné en v et trivialement ailleurs. Le sous-groupe final, est le produit de cette copie de B et du sous-groupe $\text{diag}(K \times K^a)$; cf la figure 4.

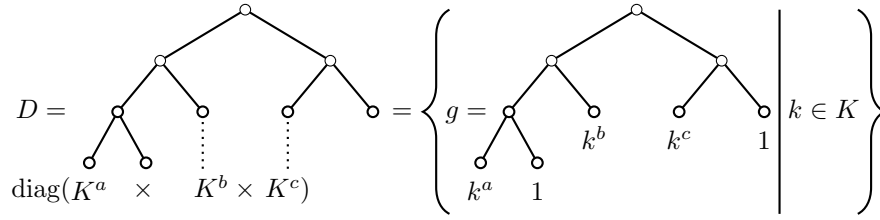


FIGURE 4 – Un sous-groupe diagonal du premier groupe de Grigorchuk. Il est constitué des éléments $g \in \text{Aut}(T)$ fixant les feuilles de l'arbre et agissant comme k^a sous la feuille la plus à gauche, comme l'identité sur la feuille voisine, etc.

à K^n , alors il est « géométriquement » isomorphe à K^n : i.e. H est un sous-groupe à bloc avec n K -blocs. Afin de démontrer cela, nous utiliserons un résultat de rigidité de Rubin [Rub96] et la structure du groupe $\text{Aut}(K)$. Nous conjecturons que $\text{Aut}(K)$ est le normalisateur $N_{\text{Aut}(T_2)}(K)$ de K dans le groupes des automorphismes de l'arbre binaire T_2 . Un résultat similaire est déjà connu pour $\mathcal{G}$ lui-même : $\text{Aut}(\mathcal{G}) = N_{\text{Aut}(T_2)}(\mathcal{G})$ [GS04], et des résultats préliminaires tendent à montrer qu'une telle égalité est possible aussi pour K .

Une deuxième partie de ce projet consiste en l'écriture d'un algorithme qui étant donnée $\{g_1, \dots, g_n\}$ retourne la structure à bloc pour $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$. L'idée principale consiste ici de réécrire pour $\mathcal{G}$ la preuve abstraite de [GLN21] (qui marche pour tous les groupes juste infinis non-virtuellement abéliens) de manière plus efficace en remplaçant tous les résultats d'existence abstraite par des constructions explicites. Nous prévoyons ensuite d'écrire un autre algorithme qui étant donné $\{g_1, \dots, g_n\}$ et $\{h_1, \dots, h_m\}$ décide si oui ou non $\langle g_1, \dots, g_n \rangle \cap \langle h_1, \dots, h_m \rangle$ est de rang fini. Écrire ces deux algorithmes demander une compréhension fine des automorphismes de K .

Une fois la conjecture 21 résolue, je prévois de m'attaquer à la question 18. L'avantage des sous-groupes à blocs, c'est qu'il est beaucoup plus agréable de travailler avec eux plutôt qu'avec des sous-groupes de rang finis quelconques. Ainsi, le produit de deux (et

d'un nombre fini) de sous-groupes à blocs ne devrait pas être trop compliqué à décrire et on peut donc espérer une réponse positive à la question 18. La principale complication ici étant que les blocs diagonaux (cf figure 4) font apparaître en général des automorphismes de G . Ainsi, la description du produit de deux blocs diagonaux n'est pas totalement évidente.

En ce qui concerne la question 17, il est important de se rappeler que tout groupe peut s'écrire comme une union croissante de sous-groupes de rang fini. Soit donc H un sous-groupe de $\mathcal{G}$. Alors H est l'union croissante de sous-groupes H_i de types finis. Pour chaque H_i , on a un sous-groupe à blocs L_i et on peut regarder $L := \bigcup_i L_i$. L'espoir ici est que L soit ce qu'on pourrait appeler un *sous-groupe à bloc généralisé*, c'est-à-dire un sous-groupe à bloc dont la définition fait intervenir un nombre infini de sommets de T . Il suit des méthodes développées dans [Lee24] qu'un tel sous-groupe est fermé. Il reste donc à voir que L a indice fini dans H , ou tout du moins que le fait que L soit fermé implique que H aussi est fermé. Comme $\mathcal{G}$ n'est pas ERF, cette méthode ne peut pas marcher en général. En effet, pour les copies de $\bigoplus_{n \geq 1} \mathbf{Z}/2^n \mathbf{Z}$ contenu dans $\mathcal{G}$, tous les L_i sont triviaux, et donc L aussi. Néanmoins, il est raisonnable d'espérer que ce soit la seule obstruction à être fermé. Le but est donc de montrer :

Conjecture 22. *Soit H un sous-groupe du premier groupe de Grigorchuk. Sont équivalents :*

1. H n'est pas fermé pour la topologie pro-finie,
2. H n'est pas à blocs généralisés,
3. $H \cong A \times B$ où A est fermé et B contient un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\bigoplus_{n_k} \mathbf{Z}/2^{n_k} \mathbf{Z}$ où $(n_k)_k$ est une séquence d'entiers strictement croissantes.

Une propriété intéressante de $\mathcal{G}$ qui intervient de manière cachée dans la discussion ci-dessus est le fait que la topologie profinie coïncide avec la topologie induite par la topologie naturelle de $\text{Aut}(T)$. Cette propriété, largement étudiée pour les groupes branchés et fort utile, permet de simplifier pas mal d'arguments et est appelée *propriété de congruence des sous-groupes*. La question suivante mériterait d'être étudiée plus attentivement.

Question 23. *Quels sont les liens entre la propriété d'induction des sous-groupes et la propriété de congruence des sous-groupes ?*

Si tout ce qui précède est un plaidoyer pour l'importance de la propriété d'induction des sous-groupes, celle-ci ne pourra s'avérer utile que si l'on est possible d'exhiber des groupes la possédant. Jusqu'à l'année passée, seuls deux exemples de tels groupes étaient connus [GW03 ; Gar16]. Dans le récent [FL24], nous montrons avec Francoeur que tous les groupes GGS de torsion ont la propriété d'induction des sous-groupes, fournissant ainsi une infinité de nouveaux exemples. Néanmoins, pour un p donné, [FL24] ne donne qu'un nombre fini de p -groupes avec la propriété d'induction des sous-groupes. Je prévois donc de m'intéresser à

Question 24. *Soit p un nombre premier. Existe-il un nombre infini de p -groupes avec la propriété d'inductions des sous-groupes ?*

Existe-il un continuum de groupes avec la propriété d'induction des sous-groupes ?

Un premier pas pour répondre à cette question est de démontrer la propriété d'induction des sous-groupes pour certaines familles bien connu de groupes branchés. Ainsi, les groupes *multi-GGS généralisés* possèdent de nombreuses caractéristiques en commun avec les GGS et une partie des méthodes de [Lee24 ; FL24] s'adaptent directement à leur cas. Il y a donc bon espoir d'arriver à montrer que les multi-GGS généralisés ont eux aussi la propriété d'induction des sous-groupes.

Finalement, on peut se poser la question de la possibilité de généraliser les résultats et les questions ci-dessus à des groupes non-branchés. En effet, si $G \leq \text{Aut}(T)$ est branché, alors l'action de G sur le bord ∂T de l'arbre est ce que l'on appelle *micro-supportée*. Le groupe de Thompson (et ses dérivés) est ainsi un exemple bien connu de groupe possédant une action fidèle micro-supportée, mais n'étant pas branché. Plusieurs résultats obtenus dans un premier temps sur les groupes branchés ont ensuite été généralisé au contexte des actions micro-supportées. Or dans [GLN21] nous donnons plusieurs définitions équivalentes de la propriété d'induction des sous-groupes, dont une qui se généralise au cas des actions micro-supportées. De plus, certaines des preuves de [FL24] fonctionnent telles quelles dans ce cadre plus large. Néanmoins, pour le moment tous les exemples de groupe avec la propriété d'induction des sous-groupes sont branchés et on peut se demander s'il existe des exemples qui ne sont pas branchés. Si on arrive à expliciter un tel exemple non branché, on peut alors essayer de généraliser les résultats de [Lee24 ; GLN21 ; FL24] à ce contexte. Sinon, on peut tenter de montrer que tout groupe avec la propriété d'induction des sous-groupes est nécessairement branché.

5 Sous-groupes auto-commensurants des groupes branchés

Ce projet s'inscrit en parallèle du projet précédant. S'il s'agit toujours d'étudier les sous-groupes des groupes branchés, cette fois-ci on s'intéresse aux sous-groupes auto-commensurant. Rappelons qu'un sous-groupe $H \leq G$ est *auto-commensurant* s'il est égal à son *commensurateur*

$$\text{Comm}_G(H) := \{g \in G \mid [H : H \cap H^g] < \infty \text{ et } [H^g : H \cap H^g] < \infty\}.$$

L'étude des sous-groupes auto-commensurant est motivée par le théorème suivant de Mackey :

Théorème 25 ([Mac76 ; BH97]). *Soit G un groupe infini et H un sous-groupe. Alors la représentation quasi-régulière $\rho_{G/H}$ est irréductible si et seulement si H est auto-commensurant.*

À noter que la représentation $\rho_{G/H}$ est de dimension infinie, mais si H est fermé pour la topologie profinie (i.e. $H = \bigcap H_n$, avec les H_n d'indice fini), alors $\rho_{G/H}$ est approximée par les représentation de dimension finie ρ_{G/H_n} .

Comme nous le verrons plus loin, l'étude des sous-groupes auto-commensurant est liées à l'étude des sous-groupes faiblement maximaux. De plus, si pour un groupe quelconque l'étude de tels sous-groupes semble hors de portée, ce n'est pas le cas pour les groupes branchés. L'idée est donc de répondre à la question suivante.

Question 26. *Est-il possible de classifier tous les sous-groupes auto-commensurant de G ? Quid pour G branché avec la propriété d'induction des sous-groupes ?*

Dans ce contexte, nous plaçons pour l'introduction d'une nouvelle propriété. Nous dirons qu'un sous-groupe $H \leq G$ est *maximal-com* si pour tout $H \leq K \leq G$, on a soit $H = K$ soit $[K : H] = \infty$. Autrement dit, H est maximal-com s'il est maximal dans sa classe de commensurabilité. Comme exemple de sous-groupe maximal-com nous avons G lui-même, mais aussi les sous-groupes faiblement maximaux (maximaux parmi les sous-groupes d'indice infini). Nous pouvons démontrer la proposition suivante :

Proposition 27. *Soit H un sous-groupe propre auto-commensurant de G . Alors H est infini, maximal-com et auto-normalisant.*

Il est naturel de se demander pour quels groupes est-ce que la converse de cette proposition est vraie.

Question 28. *Dans quels groupes la réciproque de la proposition 27 est vrai ?*

Les monstres de Tarski sont des exemples de groupes possédant des sous-groupes maximal-com et auto-normalisant mais pas auto-commensurant (mais fini). De plus, il est probable que l'on puisse utiliser des extensions HNN pour construire de vrais contre-exemples à la réciproque de la proposition 27.

Si répondre à la question 28 dans sa généralité semble compliqué, on peut se étant donné G se restreindre à une classe donnée de sous-groupes, comme par exemple les sous-groupes de rang finis.

Comme premier résultats dans cette direction, on a :

Lemme 29. *Soit G un groupe. Si G est de torsion, alors tout sous-groupe maximal-com est auto-normalisant. Si G est branché, alors tout-sous-groupe auto-normalisant est infini.*

Lemme 30 ([BG02]). *Dans un groupe branché les stabilisateurs des rayons sont auto-commensurant.*

Avec mes co-auteurs nous généralisons le lemme précédant et obtenons

Proposition 31. *Soit G un groupe branché et $C \subseteq T$ un fermé nul part dense du bord de l'arbre. Alors $\text{Stab}_G(C)$ le stabilisateur ensembliste de C est auto-commensurant.*

Dans ce cadre, nous conjecturons :

Conjecture 32. *Soit G un group branché, $C \subseteq T$ et $H = \text{Stab}_G(C)$. Sont équivalents :*

1. H est auto-commensurant,
2. H est maximal-com et auto-normalisant,
3. $H = \text{Stab}_G(\overline{C} \setminus \overset{\circ}{C})$.

Nous avons déjà prouvé les implications $1 \implies 2$ et $3 \implies 1$, il ne nous reste donc plus qu'à traiter le cas $2 \implies 3$.

Nous conjecturons aussi que

Conjecture 33. *Soit G un group branché et H un sous-groupe virtuellement à bloc. Alors sont équivalents*

1. H est auto-commensurant,
2. H est maximal-com et auto-normalisant.

Je compte ensuite m'atteler à l'étude générale des sous-groupes auto-commensurant et des sous-groupes maximal-com de $\mathcal{G}$. Les buts ultimes étant de montrer, si possible, que tout sous-groupe maximal-com de $\mathcal{G}$ est auto-commensurant, et aussi de classer ces sous-groupes. Un premier pas dans cet direction a déjà été obtenu dans [Lee24] où je montre qu'un sous-groupe faiblement maximal W de $\mathcal{G}$ est soit de type fini soit de la forme $W = \text{Stab}_G(C)$ avec C fermé, nul part dense et $W \curvearrowright C$ minimalement. Il suit de [GLN21 ; Fra+24] que si W est de type fini il est virtuellement à bloc. Ainsi (sous réserve que les conjecture sus-mentionnée soit correcte), dans $\mathcal{G}$ tout-sous-groupe faiblement maximal est auto-commensurant.

Finalement, tout comme pour l'étude des sous-groupes fermés des groupes branchés, on peut se poser la question de la possibilité de généraliser les résultats et les questions ci-dessus à d'autres groupes branchés, mais aussi à des groupes non-branchés. Une fois de plus, on s'intéressera au groupe de Thompson, ses dérivés et plus généralement aux groupes ayant une action minimale et micro-soutenue sur un Cantor. Une partie des résultats énoncés ci-dessus devrait pouvoir s'étendre à ce contexte général, notamment ceux qui concernent les stabilisateurs des fermés du bord de l'arbre.

Références

- [Bab78] László BABAI. « Infinite digraphs with given regular automorphism groups ». In : *J. Combin. Theory Ser. B* 25.1 (1978), p. 26-46. DOI : [10.1016/S0095-8956\(78\)80008-2](https://doi.org/10.1016/S0095-8956(78)80008-2). URL : [https://doi.org/10.1016/S0095-8956\(78\)80008-2](https://doi.org/10.1016/S0095-8956(78)80008-2) (cf. p. 3, 4).
- [BD12] Ajit C. BALRAM et Deepak DHAR. « Non-perturbative corrections to mean-field critical behavior : the spherical model on a spider-web graph ». In : *J. Phys. A* 45.12 (2012), p. 125006, 14. ISSN : 1751-8113. DOI : [10.1088/1751-8113/45/12/125006](https://doi.org/10.1088/1751-8113/45/12/125006) (cf. p. 7, 8).
- [BG02] Laurent BARTHOLDI et Rostislav I. GRIGORCHUK. « On parabolic subgroups and Hecke algebras of some fractal groups ». In : *Serdica Math. J.* 28.1 (2002), p. 47-90. ISSN : 1310-6600 (cf. p. 16).
- [BH97] Marc BURGER et Pierre de la HARPE. « Constructing irreducible representations of discrete groups ». In : *Proc. Indian Acad. Sci.* 107.3 (1997), p. 223-235. ISSN : 0253-4142. DOI : [10.1007/bf02867253](https://doi.org/10.1007/bf02867253). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/bf02867253> (cf. p. 15).
- [BS01] Itai BENJAMINI et Oded SCHRAMM. « Recurrence of distributional limits of finite planar graphs ». In : *Electron. J. Probab.* 6 (2001), no. 23, 13 pp. (electronic). ISSN : 1083-6489. DOI : [10.1214/EJP.v6-96](https://doi.org/10.1214/EJP.v6-96) (cf. p. 7).

- [DTW18] John Kevin DOYLE, Thomas W. TUCKER et Mark E. WATKINS. « Graphical Frobenius representations ». In : *J. Algebraic Combin.* 48.3 (2018), p. 405-428. ISSN : 0925-9899. DOI : [10.1007/s10801-018-0814-6](https://doi.org/10.1007/s10801-018-0814-6). URL : <https://doi-org.acces.bibliotheque-diderot.fr/10.1007/s10801-018-0814-6> (cf. p. 5).
- [ER70] Paul ERDŐS et Alfréd RÉNYI, éd. *Combinatorial theory and its applications. I-III*. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 4. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1970, Vol I : 390 pp., Vol. II : i-iv and pp. 395-799, Vol III : i-iii and pp. 803-1201 (cf. p. 3).
- [FK17] Fabien FRIEDLI et Anders KARLSSON. « Spectral zeta functions of graphs and the Riemann zeta function in the critical strip ». In : *Tohoku Math. J. (2)* 69.4 (2017), p. 585-610. ISSN : 0040-8735. DOI : [10.2748/tmj/1512183631](https://doi.org/10.2748/tmj/1512183631). URL : <https://doi.org/10.2748/tmj/1512183631> (cf. p. 8).
- [FL24] Dominik FRANCOEUR et Paul-Henry LEEMANN. « Subgroup induction property for branch groups ». In : *arXiv e-prints* (mars 2024). arXiv : [2011.13310](https://arxiv.org/abs/2011.13310) [math.GR] (cf. p. 12, 14, 15).
- [Fra+24] Dominik FRANCOEUR, Rostislav GRIGORCHUK, Paul-Henry LEEMANN et Tatiana NAGNIBEDA. « On the structure of finitely generated subgroups of branch groups ». In : *arXiv e-prints* (fév. 2024). DOI : [10.48550/arXiv.2402.15496](https://arxiv.org/abs/10.48550/arXiv.2402.15496) (cf. p. 17).
- [Gar16] Alejandra GARRIDO. « Abstract commensurability and the Gupta-Sidki group ». In : *Groups Geom. Dyn.* 10.2 (2016), p. 523-543. ISSN : 1661-7207. DOI : [10.4171/GGD/355](https://doi.org/10.4171/GGD/355) (cf. p. 14).
- [GLN16] Rostislav I. GRIGORCHUK, Paul-Henry LEEMANN et Tatiana NAGNIBEDA. « Lamplighter groups, de Bruijn graphs, spider-web graphs and their spectra ». In : *J. Phys. A* 49.20 (2016), p. 205004, 35. ISSN : 1751-8113. DOI : [10.1088/1751-8113/49/20/205004](https://doi.org/10.1088/1751-8113/49/20/205004) (cf. p. 8).
- [GLN21] Rostislav I. GRIGORCHUK, P.-H. LEEMANN et T. V. NAGNIBEDA. « Finitely generated subgroups of branch groups and subdirect products of just infinite groups ». In : *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* 85.6 (2021), p. 104-125. ISSN : 1607-0046. DOI : [10.4213/im9101](https://doi.org/10.4213/im9101) (cf. p. 12, 13, 15, 17).
- [GN08] Rostislav I. GRIGORCHUK et Tatiana NAGNIBEDA. « On subgroup structure of a 3-generated 2-group of intermediate growth ». In : *Profinite and Asymptotic Group Theory (MFO, Oberwolfach, Germany, June 2008)*. T. 28/2008. Oberwolfach, Germany : Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 2008, p. 1568-1571 (cf. p. 11).
- [God81] Christopher D. GODSIL. « GRRs for nonsolvable groups ». In : *Algebraic methods in graph theory, Vol. I, II (Szeged, 1978)*. T. 25. Colloq. Math. Soc. János Bolyai. North-Holland, Amsterdam-New York, 1981, p. 221-239 (cf. p. 3).

- [GR01] Christopher D. GODSIL et Gordon ROYLE. *Algebraic graph theory*. T. 207. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001, p. xx+439. ISBN : 0-387-95241-1 ; 0-387-95220-9. DOI : [10.1007/978-1-4613-0163-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0163-9). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4613-0163-9> (cf. p. 6).
- [Gri80] Rostislav I. GRIGORCHUK. « On Burnside's problem on periodic groups ». In : *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 14.1 (1980), p. 53-54. ISSN : 0374-1990 (cf. p. 10).
- [Gri84] Rostislav I. GRIGORCHUK. « Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means ». In : *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 48.5 (1984), p. 939-985. ISSN : 0373-2436 (cf. p. 10).
- [GS04] R. I. GRIGORCHUK et S. N. SIDKI. « The group of automorphisms of a 3-generated 2-group of intermediate growth ». In : *Internat. J. Algebra Comput.* 14.5-6 (2004). International Conference on Semigroups and Groups in honor of the 65th birthday of Prof. John Rhodes, p. 667-676. ISSN : 0218-1967. DOI : [10.1142/S0218196704001943](https://doi.org/10.1142/S0218196704001943). URL : <https://doi.org/10.1142/S0218196704001943> (cf. p. 13).
- [GW03] Rostislav I. GRIGORCHUK et John S. WILSON. « A structural property concerning abstract commensurability of subgroups ». In : *J. London Math. Soc. (2)* 68.3 (2003), p. 671-682. ISSN : 0024-6107. DOI : [10.1112/S0024610703004745](https://doi.org/10.1112/S0024610703004745) (cf. p. 12, 14).
- [Het76] D. HETZEL. « Über reguläre graphische Darstellung von auflösbaren Gruppen ». Thèse de doct. Technische Universität Berlin, 1976 (cf. p. 3).
- [Ike59] Nobuichi IKENO. « A limit on crosspoint numbers ». In : *IRE Trans. Inform. Theory* 5 (1959), p. 18-196 (cf. p. 7).
- [Imr69] Wilfried IMRICH. « Graphen mit transitiver Automorphismengruppe ». In : *Monatsh. Math.* 73 (1969), p. 341-347. DOI : [10.1007/BF01298984](https://doi.org/10.1007/BF01298984) (cf. p. 3).
- [Imr75] Wilfried IMRICH. « On graphs with regular groups ». In : *J. Combinatorial Theory Ser. B* 19.2 (1975), p. 174-180 (cf. p. 3).
- [Iqb+12] Z. IQBAL, M. CACCAMO, I. TURNER, P. FLICEK et G. MCVEAN. « De novo assembly and genotyping of variants using colored de Bruijn graphs ». In : *Nature Genetics* 44 (2012) (cf. p. 7).
- [IW76] Wilfried IMRICH et Mark E. WATKINS. « On automorphism groups of Cayley graphs ». In : *Period. Math. Hungar.* 7.3-4 (1976), p. 243-258. ISSN : 0031-5303. DOI : [10.1007/BF02017943](https://doi.org/10.1007/BF02017943) (cf. p. 3).
- [Kit98] Bruce P. KITCHENS. *Symbolic dynamics*. Universitext. One-sided, two-sided and countable state Markov shifts. Springer-Verlag, Berlin, 1998, p. x+252. ISBN : 3-540-62738-3. DOI : [10.1007/978-3-642-58822-8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-58822-8). URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-58822-8> (cf. p. 9).

- [KS12] Vadim A. KAIMANOVICH et Florian SOBIECZKY. « Random walks on random horospheric products ». In : *Dynamical systems and group actions*. T. 567. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, p. 163-183. DOI : [10.1090/conm/567/11255](https://doi.org/10.1090/conm/567/11255). URL : <http://dx.doi.org/10.1090/conm/567/11255> (cf. p. 9).
- [Lee+24] Paul-Henry LEEMANN, Tatiana NAGNIBEDA, Alexandra SKRIPCHENKO et Georgii VEPREV. « Limits of Rauzy graphs of languages with subexponential complexity ». In : *arXiv e-prints* (fév. 2024). DOI : [10.48550/arXiv.2402.15877](https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.15877) (cf. p. 10).
- [Lee16a] Paul-Henry LEEMANN. « On Subgroups and Schreier Graphs of Finitely Generated Groups ». Thèse de doct. Université de Genève, 2016 (cf. p. 6).
- [Lee16b] Paul-Henry LEEMANN. « Schreier graphs : Transitivity and coverings ». In : *Internat. J. Algebra Comput.* 26.1 (2016), p. 69-93. ISSN : 0218-1967. DOI : [10.1142/S021819671650003X](https://doi.org/10.1142/S021819671650003X) (cf. p. 6).
- [Lee24] Paul-Henry LEEMANN. « Weakly maximal subgroups of branch groups ». In : *arXiv e-prints* (mars 2024). arXiv : [1910.06399](https://arxiv.org/abs/1910.06399) [[math.GR](https://arxiv.org/archive/math)] (cf. p. 12, 14, 15, 17).
- [LLR18] Alexander LUBOTZKY, Zur LURIA et Ron ROSENTHAL. « On groups and simplicial complexes ». In : *European J. Combin.* 70 (2018), p. 408-444. ISSN : 0195-6698. DOI : [10.1016/j.ejc.2018.01.009](https://doi.org/10.1016/j.ejc.2018.01.009). URL : <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2018.01.009> (cf. p. 6).
- [LS21] Paul-Henry LEEMANN et Mikael de la SALLE. « Cayley graphs with few automorphisms ». In : *J. Algebraic Combin.* 53.4 (2021), p. 1117-1146. ISSN : 0925-9899. DOI : [10.1007/s10801-020-00956-1](https://doi.org/10.1007/s10801-020-00956-1) (cf. p. 3, 5, 6).
- [LS22a] Paul-Henry LEEMANN et Mikael de la SALLE. « Cayley graphs with few automorphisms : the case of infinite groups ». In : *Annales Henri Lebesgue* 5 (2022), p. 73-92. DOI : [10.5802/ahl.118](https://doi.org/10.5802/ahl.118) (cf. p. 3, 5).
- [LS22b] Paul-Henry LEEMANN et Mikael de la SALLE. « Most rigid representation and Cayley index of finitely generated groups ». In : *Electron. J. Combin.* 29.4 (2022), Paper No. 4.40, 9. ISSN : 1077-8926. DOI : [10.37236/10512](https://doi.org/10.37236/10512) (cf. p. 4).
- [Mac76] George W. MACKEY. « The theory of unitary group representations ». In : 1976. URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118835363> (cf. p. 15).
- [Mal58] Anatoly I. MAL'CEV. « On homomorphisms onto finite groups ». In : *Ivanov. Gos. Ped. Inst. Ucen. Zap.* 18 (1958). English translation : Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc. 119, 67-79, 1983, p. 49-60 (cf. p. 11).
- [Nek05] Volodymyr NEKRASHEVYCH. *Self-similar groups*. T. 117. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005, p. xii+231. ISBN : 0-8218-3831-8. DOI : [10.1090/surv/117](https://doi.org/10.1090/surv/117) (cf. p. 10).

- [NW72] Lewis A. NOWITZ et Mark E. WATKINS. « Graphical regular representations of non-abelian groups. I, II ». In : *Canad. J. Math.* 24 (1972), 993-1008, ibid. 24 (1972), 1009-1018. ISSN : 0008-414X. DOI : [10.4153/CJM-1972-101-5](https://doi.org/10.4153/CJM-1972-101-5) (cf. p. 3).
- [Per00] Ekaterina L. PERVOVA. « Everywhere dense subgroups of a group of tree automorphisms ». In : *Tr. Mat. Inst. Steklova* 231.Din. Sist., Avtom. i Beskon. Gruppy (2000), p. 356-367. ISSN : 0371-9685 (cf. p. 12).
- [Pip06] Nicholas PIPPENGER. « The linking probability of deep spider-web networks ». In : *SIAM J. Discrete Math.* 20.1 (2006), 143-159 (electronic). ISSN : 0895-4801. DOI : [10.1137/050624376](https://doi.org/10.1137/050624376) (cf. p. 7).
- [Pip91] Nicholas PIPPENGER. « The blocking probability of spider-web networks ». In : *Random Structures Algorithms* 2.2 (1991), p. 121-149. ISSN : 1042-9832. DOI : [10.1002/rsa.3240020202](https://doi.org/10.1002/rsa.3240020202) (cf. p. 7).
- [Pip92] Nicholas PIPPENGER. « The asymptotic optimality of spider-web networks ». In : *Discrete Appl. Math.* 37/38 (1992), p. 437-450. ISSN : 0166-218X. DOI : [10.1016/0166-218X\(92\)90150-9](https://doi.org/10.1016/0166-218X(92)90150-9) (cf. p. 7).
- [RRV09] Derek J. S. ROBINSON, Alessio RUSSO et Giovanni VINCENZI. « On groups whose subgroups are closed in the profinite topology ». In : *J. Pure Appl. Algebra* 213.4 (2009), p. 421-429. ISSN : 0022-4049. DOI : [10.1016/j.jpaa.2008.07.015](https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2008.07.015). URL : <https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2008.07.015> (cf. p. 11).
- [Rub96] Matatyahu RUBIN. « Locally moving groups and reconstruction problems ». In : *Ordered groups and infinite permutation groups*. T. 354. Math. Appl. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996, p. 121-157 (cf. p. 13).
- [Toi20] Matthew C. H. TOINTON. « Commuting probabilities of infinite groups ». In : *J. Lond. Math. Soc. (2)* 101.3 (2020), p. 1280-1297. ISSN : 0024-6107. DOI : [10.1112/jlms.12305](https://doi.org/10.1112/jlms.12305). URL : <https://doi.org/10.1112/jlms.12305> (cf. p. 5).
- [Wat71] Mark E. WATKINS. « On the action of non-Abelian groups on graphs ». In : *J. Combinatorial Theory Ser. B* 11 (1971), p. 95-104 (cf. p. 3).
- [Wat72] Mark E. WATKINS. « On graphical regular representations of $C_n \times Q$ ». In : *Graph theory and applications (Proc. Conf., Western Michigan Univ., Kalamazoo, Mich., 1972; dedicated to the memory of J. W. T. Youngs)*. Springer, Berlin, 1972, 305-311. Lecture Notes in Math., Vol. 303 (cf. p. 3).
- [Wat74] Mark E. WATKINS. « Graphical regular representations of alternating, symmetric, and miscellaneous small groups ». In : *Aequationes Math.* 11 (1974), p. 40-50. ISSN : 0001-9054. DOI : [10.1007/BF01837731](https://doi.org/10.1007/BF01837731) (cf. p. 3).
- [Wat76] Mark E. WATKINS. « Graphical regular representations of free products of groups ». In : *J. Combinatorial Theory Ser. B* 21.1 (1976), p. 47-56 (cf. p. 3).

- [Wil08] Henry WILTON. « Hall's theorem for limit groups ». In : *Geom. Funct. Anal.* 18.1 (2008), p. 271-303. ISSN : 1016-443X. DOI : [10.1007/s00039-008-0657-8](https://doi-org.acces.bibliotheque-diderot.fr/10.1007/s00039-008-0657-8). URL : <https://doi-org.acces.bibliotheque-diderot.fr/10.1007/s00039-008-0657-8> (cf. p. 11).