Rapport d'activité de recherche

Paul-Henry Leemann

Au cours de ces dernières années j'ai travaillé en théorie géométrique, combinatoire et asymptotique des groupes ainsi que sur la dynamique et les limites de graphes. J'ai plus précisément orienté mes recherches selon 4 axes principaux, distincts mais non sans liens entre eux.

Le premier thème de recherche s'intéresse au phénomène de rigidité dans les graphes de Cayley. Dans [19, 20], nous montrons avec M. de la Salle qu'à l'exception des groupes abéliens et des groupes dicycliques généralisés, tout group G de type fini admet un graphe de Cayley avec G comme groupe d'automorphisme.

Le deuxième thème, très lié au premier, traite de la transitivité des graphes ainsi que des revêtements. Je donne dans [17, 16] une caractérisation algébrique de la transitivité d'un graphe de Schreier et répond partiellement à une conjecture de Benjamini concernant les graphes qui peuvent être revêtu par un graphe de Cayley donné. De manière surprenante, ce sujet est aussi lié aux groupes simples.

Un troisième thème de recherche concerne les sous-groupes du groupe de Grigorchuk et plus généralement des groupes branchés. Une attention toute particulière est portée aux sous-groupes faiblement maximaux ainsi qu'aux sous-groupes de type finis. Pour le groupe de Grigorchuk, une description complètes de ces sous-groupes est donnée respectivement dans [18] et [11]. Une généralisations de ces résultats à d'autres groupes est obtenue dans [5].

Le dernier thème de recherche part lui de l'étude les graphes de de Bruijn et leurs différentes généralisations. Des physiciens ont récemment montré que, à la limite, ces graphes partageaient certaines caractéristiques des graphes de Cayley du groupe de l'allumeur de réverbère. Avec mes coauteurs, nous donnons dans [9] une explication satisfaisante à ce phénomène, en terme de limite de graphes. Cela permet de mieux comprendre le comportement des graphes de de Bruijn, mais aussi de pouvoir facilement faire des calculs sur le groupe de l'allumeur de réverbère. Au passage, on aborde le produit tensoriel de graphes et certains systèmes dynamiques.

1 Rigidité des graphes de Cayley

Les résultats de cette section proviennent d'une série de deux articles en commun avec M. de la Salle, [19, 20].

Soit G un groupe et S un système de générateur. On peut associer au couple (G,S) son *graphe de Cayley :* $\mathrm{Cay}(G;S)$. Les sommets de $\mathrm{Cay}(G;S)$ sont les éléments de G et il y a une arrête entre g et h si et seulement si $g^{-1}h$ ou $h^{-1}g$ est dans S. Cette construction est bien connue et permet de voir G comme un espace métrique. Le groupe G agit sur $\mathrm{Cay}(G;S)$ par multiplication à gauche, ce qui donne donc une injection de G dans le groupe $\mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(G;S))$ des automorphismes de $\mathrm{Cay}(G;S)$. Si cette injection est en fait une égalité, on dit que $\mathrm{Cay}(G;S)$ est une *représentation graphique rigide* de G. Un groupe G est *rigide* s'il admet une telle représentation. Une simple vérification montre que les groupes abéliens (d'exposant au moins 3) ne sont pas rigide. En effet, $g\mapsto g^{-1}$ est toujours un élément de $\mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(G;S))\setminus G$. On peut aussi facilement montrer que les groupes dicycliques généralisés ne sont pas rigides. Finalement, il existe 13 groupes finis d'ordre au plus 32 qui ne sont pas rigide. En se basant sur ses observations ainsi que sur d'autres travaux antérieurs, Watkins formula la conjecture suivante en 1976 :

Conjecture 1 ([28])**.** *En dehors des exemples sus-mentionné, tout groupe est rigide.*

Grâces aux efforts combinés de nombreux mathématiciens dont notamment Imrich, Watkins, Nowitz, Hetzel et Godsil, cette conjecture a été démontrée dans les années 70 pour les groupes finis, [13, 4, 25, 22, 26, 27, 14, 15, 12, 7]. En ce qui concerne les groupes infinis, la situation était moins claire et très peu de résultats existaient. Avec Mikael de la Salle, nous avons récemment résolu cette conjecture pour les groupes infinis de type finis :

Théorème 2 ([19, 20])**.** *Soit G un groupe infini de type fini. Alors G est rigide si et seulement si il n'est ni abélien ni dicyclique de type généralisé.*

Pour prouver ce fait, nous avons exploré deux notions de rigidités. Le graphe $\mathrm{Cay}(G;S)$ est dit *orientation-rigide* si tout automorphisme préservant l'étiquetage des arêtes non-orientées préserve aussi l'étiquetage des arêtes orientées et *couleur-rigide* si tout automorphisme préserve l'étiquetage des arêtes non-orientées. Il est ainsi clair qu'un graphe de Cayley de G est une représentation graphique rigide si et seulement si il est à la fois orientation-rigide et couleur-rigide. Nous montrons tout d'abords que pour un groupe G sont équivalent [1] le fait de n'être ni abélien d'exposant au moins 3 ni dicyclique généralisé et le fait que pour tout ensemble de générateurs S le graphe $\mathrm{Cay}(G;S^{\leq 3})$ est orientation-rigide. Nous montrons ensuite que si G est infini engendré par un ensemble S fini de générateurs, alors il existe un système de générateurs $S\subset T$ tel que $\mathrm{Cay}(G;T)$ soit couleur-rigide. Nous avons obtenue ce second résultat en deux temps. Tout d'abords dans [19] nous avons traité le cas où G possède un élément d'ordre infini. [2] La preuve de ce fait est essentiellement combinatoire. Dans un deuxième temps [20], nous avons traité le cas de G non virtuellement abélien. Cette fois la preuve repose sur des marches aléatoires et consiste essentiellement à analyser le comportement de la fonction racine carrée dans un groupe. Ainsi, si on note $\mathrm{sq}\colon g\mapsto g^2$, nous obtenons tout d'abords

1. Ici on ne suppose pas G de type fini.
2. Ou plus généralement, un élément d'ordre suffisamment grand (dépendant de $|S|$).

lemma 3 ([20]). *Soit G un groupe de type fini. Alors G est infini si et seulement si l'ensemble de ses carrés* $\mathrm{sq}(G)$ *est infini.*

Nous obtenons ensuite une version forte de ce résultat :

Théorème 4 ([20]). *Soit G un groupe infini de type fini. Supposons qu'il existe $F \subset G$ fini et $g \in G$ tel que $G \setminus (\mathrm{sq}^{-1}(F) \cup g\,\mathrm{sq}^{-1}(F))$ soit fini. Alors G est virtuellement abélien.*

Ceci peut être vu comme un analogue du résultat qui dit qu'un groupe fini avec plus de $\frac{3}{4}$ de ses éléments d'ordre 2 est abélien.

Non seulement, les méthodes développées dans [19, 20] permettent de répondre à la conjecture 1, mais en même temps elles permettent aussi de répondre aux questions analogues pour les graphes dirigés, ainsi que pour les graphes orientés. Un graphe orienté étant un graphe dirigé sans bigones : s'il y a un arc de v à w, alors il n'y a pas d'arcs de w à v. Nous obtenons ainsi une preuve unifiée et relativement élémentaire de ces trois cas. C'est une nette amélioration par rapport aux groupes finis ou les preuves sont faîtes de multitudes de sous-cas et utilisent Feit-Thompson (pour la conjecture 1) voir la classification des groupes simples finis (pour la version orientée, résolue récemment dans [21]).

De plus, nos méthodes nous permettent de prouver une version «asymptotique» du théorème 2 :

Théorème 5 ([19, 20]). *Soit G un groupe infini de type fini qui n'est ni abélien ni dicyclique de type généralisé. Alors pour tout ensemble fini et symétrique S de générateurs, il existe $S \subset T$ fini tel que* $\mathrm{Cay}(G;T)$ *est une représentation graphique rigide.*

Les analogues du théorème ci-dessus pour les versions dirigées et orientées restent vraies. De plus, il existe une fonction explicite f telle que $|T| \leq f(|S|)$. Finalement, si on se restraint aux groupes possédants des éléments d'ordre arbitrairement grand (possiblement infini), alors on a un algorithme qui étant donné (G, S) et un oracle pour le problème du mot dans G, renvoie T.

2 Revêtements de graphes transitifs et simplicité forte des groupes

Les résultats de cette section font l'objet du chapitre 3 de ma thèse et ont pour l'essentiel été publiés dans [17].

Le point de départ des recherches menées dans cette section a été la question suivante de Benjamini.

Question 6. *Existe-t-il un graphe de Cayley d'un groupe infini de type fini (différent de* $\mathbf{Z}$*) qui ne recouvre aucun autre graphe infini transitif ?*

Si dans cette question on remplace « graphe transitif » par graphe de Cayley et qu'on demande que le revêtement préserve l'étiquetage (on parlera de *revêtement fort*), alors la réponse est oui. Il suffit de prendre n'importe quel groupe simple (ou plus généralement juste infini) infini et de type fini.

Une première étape a consisté à montrer que tout graphe transitif était un graphe de Schreier d'un groupe libre [3]. Pour ce faire, on utilise des idées dues à Aharonni sur les couplages dans les graphes infinis, ainsi que le théorème de compacité afin de démontrer

Proposition 7. *Soit Γ un graphe simple, transitif de degré d impaire. Alors Γ admet un couplage parfait.*

Étant donné deux sous-groupes A et B d'un groupe, le graphe de Schreier de A revêt fortement celui de B si et seulement si A est contenu dans (un conjugué) de B. Pour répondre à la question de Benjamini, il est donc util d'avoir une caractérisation algébrique de la transitivité d'un graphe de Schreier. Dans [17], je donne une caractérisation de l'isomorphisme entre deux graphes de Schreier en terme du système de générateur et des sous-groupes. La preuve de cette caractérisation est essentiellement combinatoire. Dans les cas des graphes de degré pair, cette caractérisation peut être reformulée dans des termes purement graphe-théorique, sans réalisation préalable des graphes comme des graphes de Schreier, et peut être pensé comme un résultat de rigidité à la Mostow. Un corollaire immédiat est la caractérisation de la transitivité d'un graphe de Schreier en fonction du sous-groupe et du système de générateurs. De tels sous-groupes généralisent la notion de sous-groupes normaux et sont appelés *transitif par les longueurs*. Dans [17] et ma thèse, j'en débute l'étude, exhibant en particulier leur dépendance au système de générateurs ou le fait que l'intersection de deux sous-groupes transitifs par les longueurs est toujours transitive par les longueurs. Cette étude permet au passage de donner une nouvelle caractérisation des sous-groupes normaux des groupes de type fini. Ce sont les sous-groupes de G tels que pour tout système de générateurs de taille au plus $\operatorname{rang}(G)+1$, le graphe de Schreier soit transitif.

La notion de sous-groupes transitifs par les longueurs induit une notion de groupe fortement simple : tout groupe ne possédant aucun tels sous-groupes propres non-triviaux. Je prouve que cette notion est strictement plus forte que la simplicité, mais strictement plus faible que d'être cyclique d'ordre premier :

Théorème 8. *Pour $n \geq 5$ impair, le groupe alterné A_n n'est pas fortement simple. D'autres part, les monstres de Tarski sont fortement simple.* [4]

Pour démontrer ce résultat, on utilise le fait que dans un monstre de Tarski tout sous-groupe propre non-trivial est cyclique d'ordre premier. Ceci permet de répondre partiellement à la question de Benjamini. En effet, par ce qui précède, tout graphe de Cayley d'un monstre de Tarski ne revêt fortement aucun autre graphe infini transitif. Avec Mikael de la Salle, nous avons ensuite améliorer ce résultat dans [19] et obtenir :

Proposition 9. *Soit G un monstre de Tarski. Alors il existe un système de générateur T de G tel que pour tout revêtement non-trivial $\varphi\colon \mathrm{Cay}(G;T) \to \Delta$ de rayon d'injectivité au moins 3, le graphe Δ n'est pas quasi-transitif.*

3. En fait d'un groupe de la forme $F_n \star (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{\star m}$ où F_n est le groupe libre de rang n.
4. Ils sont même plus que cela : leurs graphes de Schreier ne sont même pas quasi-transitif, et ce pour tout système fini de générateurs.

Si ce résultat ne répond pas totalement à la question de Benjamini, on n'en est pas loin. En effet, si le graphe Δ est simple (sans boucles et sans arrêtes multiples), alors $\varphi\colon \operatorname{Cay}(G;T) \to \Delta$ a rayon d'injectivité au moins 2.

Finalement, dans [17] je montre aussi certaines généralisations du fait que si H est un quotient de G par un sous-groupe fini, alors leur deux graphes de Schreier sont quasi-isométriques. Certaines de ces généralisations s'expriment en termes de sous-groupes « nearly normal » ou de sous-groupes « almost normal » — ici le groupe G est vu comme le quotient F_d/N et correspond donc à un sous-groupe normal. Ce qui est plus surprenant est que certaine de ces généralisation s'expriment en terme de graphes quasi-transitifs.

3 Structure des sous-groupes des groupes branchés

Les résultats de cette section ont en partie été obtenus avec la collaboration de Khalid Bou-Rabee, Dominik Francoeur, Rostislav Grigorchuk, Tatiana Nagnibeda et font l'objet des articles [2, 18, 11, 5].

Les groupes branchés sont depuis les années 80 une source d'exemples et de contre-exemples important en théorie géométrique des groupes. Ils apparaissent notamment comme l'une des trois classes de groupes juste infinis (groupes infinis dont tous les quotients propres sont finis) et contiennent des exemples de groupes infinis qui sont de torsion ainsi que de groupes à croissance intermédiaire tel le *premier groupe de Grigorchuk* $\mathfrak{G}$. Un groupe branché est un sous-groupe du groupe d'automorphisme d'un arbre enraciné T qui satisfait deux conditions. Premièrement, l'action sur le bord ∂T de l'arbre est minimal. Deuxièmement, les fixateurs des ouvert-fermés non-vide de ∂T sont « gros » (en particulier, infini).

Les groupes branchés possèdent de nombreux sous-groupes et leur études à été l'objet de beaucoup d'attention. Par exemple, Pervova [23] a démontré que tous les sous-groupes maximaux du premier groupe de Grigorchuk avaient indice 2 et était donc de type fini.

L'étape suivante est l'étude des *sous-groupes faiblement maximaux*, c'est-à-dire des sous-groupes maximaux parmi les sous-groupes d'indice infini. Le point de départ de cet étude est la démonstration par Bartholdi et Grigorchuk que dans un groupe branché, tous les sous-groupes paraboliques (les stabilisateurs des points de ∂T) sont faiblement maximaux, infinis et distincts. En partant de là, plusieurs problèmes naturels se présentent. Existe-t-il d'autres sous-groupes faiblement maximaux ? Si oui, ont-ils de bonnes propriétés, et est-il possible de les classer [8] ?

Avec K. Bou-Rabee et T. Nagnibeda nous avons montré

Théorème 10 ([2])**.** *Soit G un groupe branché. Alors tout sous-groupe fini Q de G est contenu dans un nombre non-dénombrable de sous-groupes faiblement maximaux.*

En particulier, pour le groupe de Grigorchuk ou les groupes spinaux généralisés, si on prend $Q = \langle a \rangle$ on obtient qu'il existe un nombre non-dénombrable de sous-groupes faiblement maximaux qui ne sont pas paraboliques. En effet, a ne stabilisant aucun rayon il ne peut pas être contenu dans des sous-groupes paraboliques. La preuve pour Q quelconque est un argument diagonal et possède des similitudes avec la preuve de Margulis et Soĭfer pour l'existence d'un nombre non-dénombrable de sous-groupes maximaux d'indices infinis dans les groupes linéaires non virtuellement résoluble. Au passage, nous prouvons que les sous-groupes faiblement maximaux dans un groupe de torsion sont auto-normalisant (égal à leur normalisateur).

Dans [2], nous montrons aussi qu'il existe des sous-groupes faiblement maximaux vivant aussi bas que l'on veut dans l'arbre. Plus précisément : pour tout sommet v de l'arbre, il existe un sous-groupe faiblement maximal W_v tel que W_v stabilise v, mais ne stabilise aucun sommet situé sur un niveau plus bas.

Dans ma thèse, je démontre aussi une légère amélioration du résultat de Margulis et Soĭfer pour le cas spécifiques des groupes libres non-abéliens. Dans ce cas, il existe un continuum de sous-groupes maximaux d'indice infini. Le « gain » par rapport à la version non-dénombrable est faible (voir nul si l'on croit à l'hypothèse du continu), mais le réel avantage réside dans la preuve qui est bien plus courte et facile à comprendre que celle du cas générale. En effet, puisque tout graphe $2d$-régulier est un graphe de Schreier du groupe F_d, l'existence de sous-groupe maximaux d'indices infinis revient à trouver des graphes infinis $2d$-régulier qui ne revêtent fortement aucun graphe, a part eux-mêmes et la rose. Ce dernier critère est relativement aisé à vérifier.

Finalement, dans un travail récent [18] j'identifie deux familles de sous-groupes faiblement maximaux dans les groupes branchés. La première famille est une généralisation des sous-groupes paraboliques et consiste en les stabilisateurs (ensemblistes) $\mathrm{Stab}_G(C)$, où C est un fermé non-ouvert du bord ∂T de l'arbre tel que $\mathrm{Stab}_G(C)$ agit minimalement sur C. Ces sous-groupes, que j'appelle *paraboliques généralisés* partagent de nombreuses propriétés avec les sous-groupes paraboliques. La deuxième famille contient les sous-groupes faiblement maximaux avec une *structure à blocs*. Heuristiquement, un sous-groupe de G a une structure à bloc si, à indice fini près, il est un produit de copies de G (certaines inclues diagonalement).

Théorème 11 ([18]). *Soit G le groupe de Grigorchuk. Les sous-groupes faiblement maximaux de G appartiennent à l'une des deux classes suivantes : paraboliques généralisés et faiblement maximaux avec une structure à blocs. Ces deux classes admettent de nombreuses caractérisations, comme montré dans la table 1.*

En fait, les résultat de [18] ne concernent pas seulement le groupe de Grigorchuk, mais plus généralement les groupes branchés auto-réplicants ayant la *propriétés d'induction des sous-groupes*. Nous n'allons pas définir ici explicitement ce qu'est cette propriété qui concerne les sous-groupes de type finis, mais nous intéresser à ses conséquences. Jusqu'à l'année passée, la propriété d'induction des sous-groupes n'étaient connues que pour deux examples : le premier groupe de Grigorchuk $\mathfrak{G}$ [10] et le 3-groupe de Gupta-Sidki G_3 [6].

Grigorchuk et Wilson d'une part [10] ainsi que Garrido d'autre part [6] ont utilisé la propriété d'induction des sous-groupes pour montrer que $\mathfrak{G}$ et G_3 étaient LERF. C'est-à-dire que tous leurs sous-groupes de type finis sont fermés pour la topologie profinie.[5] La propriété d'induction des sous-groupes à aussi permis à Skipper et Wesolek [24] de calculer le rang de Cantor-Bendixon de $\mathfrak{G}$ et de G_3.

5. C'est la topologie engendrée par les sous-groupes d'indice finis.

parabolique généralisé	structure à blocs
pas de type fini	de type fini
$\forall v : \mathrm{Rist}_W(v)$ est infini	$\exists v : \mathrm{Rist}_W(v) = \{1\}$
$\{\overline{W.\xi} \mid \xi \in \partial T\}$ est infini	$\{\overline{W.\xi} \mid \xi \in \partial T\}$ est fini
$\forall n \exists v \in \mathcal{L}_n : [\pi_v(G) : \pi_v(W)]$ est infini	$\exists n \forall v \in \mathcal{L}_n : [\pi_v(G) : \pi_v(W)]$ est fini

Table 1 – Les deux classes de sous-groupes faiblement maximaux du groupe de Grigorchuk. Ici $\pi_v(G) = \pi_v(\mathrm{Stab}_G(v))$ est la projection (aussi appelée section) des éléments de $\mathrm{Stab}_G(v)$ sur le groupe des automorphismes du sous-arbre enraciné à v alors que $\mathcal{L}_n$ dénote le n-ème level de l'arbre (l'ensemble des sommets à distance n de la racine). Finalement, $\mathrm{Rist}_W(v)$, le *stabilisateur rigide*, est le fixateur dans W des sommets de T qui ne sont pas situés sous v.

Dans [11] (avec Grigorchuk et Nagnibeda) et [5] (avec Francoeur) nous généralisons les résultats de [10, 6, 24], donnons une infinité de nouveaux exemples de groupes possédant la propriété d'induction des sous-groupes et investiguons certaines conséquences de cette propriété. Nous obtenons ainsi

Théorème 12 ([5])**.** *Tout groupe GGS de torsion a la propriété d'induction des sous-groupes.*

Étant donné que pour tout premier p il existe au moins un GGS de torsion de correspondant, on obtient ainsi une infinité de groupes non-isomorphes avec la propriété d'induction des sous-groupes. D'autres part, nous montrons aussi

Théorème 13 ([5])**.** *Soit G un groupe branché de type fini avec la propriété d'induction des sous-groupes. Alors G est de torsion et juste infini.*

Si de plus G est un p-groupe, alors tout ses sous-groupes maximaux sont d'indice fini.

Finalement, le principal résultat de [11] est le suivant :

Théorème 14 ([11])**.** *Soit G un groupe branché, auto-réplicant et tel que* $\mathrm{Stab}_G(v) = \mathrm{Stab}_G(\mathcal{L}_1)$ *pour tout sommet v du premier niveau. Alors G à la propriété d'induction des sous-groupes si et seulement si ses sous-groupes de type fini coincident avec ses sous-groupes avec une structure à blocs.*

Corollaire 15 ([11])**.** *Soit G comme dans le théorème 14. Si de plus G a la propriété de congruence des sous-groupes, alors G est LERF.*

Le théorème 14 est obtenu comme corollaire d'un résultat sur les produits sous directs de groupes justes-infinis. C'est-à-dire sur les sous-groupes $A \leq \prod G_i$ avec les G_i justes infinis et tels que pour tout i la projection canonique $A \to G_i$ soit surjective.

4 Graphes de Bruijn et généralisations

Une partie des résultats de cette section à fait l'objet d'une publication dans [9] et est un travail en commun avec R. Grigorchuk et T. Nagnibeda. La partie sur la complexité est un travail en commun avec T. Nagnibeda. Finalement, le calcul du nombre d'orbites dans les graphes toile d'araignée ainsi que la partie sur les graphes de Rauzy sont un travail personnel présent dans ma thèse.

Les graphes toile d'araignée on été introduit en 1959 par N. Ikeno pour étudier les réseaux téléphoniques. Dans les années 1990, N. Pippenger à démontré qu'ils possédaient d'intéressantes propriétés de percolations. Dans [1], Balram et Dhar montrent que les mesures spectrales des graphes toile d'araignée $\mathcal{S}_{2,N,M}$ converge, pour N et M tendant ensemble vers l'infini, vers la mesure spectrale du graphe $\mathrm{DL}(2,2)$, le graphe de Cayley du groupe de l'allumeur de réverbère $\mathcal{L}_2 \coloneqq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \wr \mathbf{Z}$. Avec mes coauteurs nous avons montré que ce comportement provient d'un phénomène plus général.

Théorème 16 ([9])**.** *Pour tout k, la limite de Benjamini-Schramm (ou limite faible) des $\mathcal{S}_{k,N,M}$ est $\mathrm{DL}(k,k)$, et ce indépendamment de la manière dont l'on fait tendre N et M vers l'infini.*

La preuve de ce fait se déroule comme suit. Premièrement, on constate que les versions orientées $\vec{\mathcal{S}}_{k,N,M}$ sont isomorphes à des produits tensoriels de cycles $\vec{C}_M$ et de graphe de Bruijn $\vec{\mathcal{B}}_{K,N}$. On travail ensuite sur les produits tensoriels pour montrer qu'il suffit de s'occuper du cas $\vec{\mathcal{B}}_{K,N}$ qui correspond à $M=1$. Puis on montre que le graphe de Cayley de $\mathcal{L}_k$ est approximé par les graphes de Schreier de son action sur l'arbre enraciné k-régulier. Finalement, on prouve que $\vec{\mathcal{B}}_{K,N}$ est isomorphe au graphe de Schreier de l'action de $\mathcal{L}_k$ sur le N-ème niveau de l'arbre. Pour se faire, on utilise les graphes de lignes.

La structure de produit tensoriel des $\vec{\mathcal{S}}_{k,N,M}$ nous permet aussi de généraliser un argument dû à Delorme et Tillich, [3], afin de calculer la mesure spectrale de $\mathcal{S}_{k,N,M}$.

Théorème 17 ([9])**.** *La mesure spectrale $\mu_{\mathcal{S}_{k,N,M}}$ de $\mathcal{S}_{k,N,M}$ est, si M est impair,*

$$\frac{1}{Mk^N}\delta_{2k} + \sum \delta_{2k\cos(\frac{p}{q}\pi)}\left((k-1)^2\left(\frac{1-k^{-q(\lfloor\frac{N}{q}\rfloor+1)}}{1-k^{-q}}-1\right)+\frac{k-1}{k^N}r_1+\frac{2}{Mk^N}r_2\right)$$

où la somme est prise sur tous les $1 \leq p < q \leq N+1$ tel que $\mathrm{pgcd}(p,q)=1$ et où

$$r_1 = r_1(q,N) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \text{ divise } N+1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

et

$$r_2 = r_2(p,q,M) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2q \text{ divise } Mp \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Si M est pair, il y a un terme de plus : $\frac{1}{Mk^N}\delta_{-2k}$.

On s'intéresse ensuite rapidement à la complexité (le nombre d'arbres couvrants) des graphes toile d'araignée et à leur fonction zeta spectrale. On montre en particulier que les fonctions zeta des graphes toile d'araignée convergent vers la fonction zeta de $\mathrm{DL}(k,k)$. Ceci nous permet de calculer le déterminant de Fuglede-Kadison de $\mathrm{DL}(k,k)$ et d'obtenir

$$\zeta'_{\mathrm{DL}(k,k)}(0) = (k-1)^2 \frac{d}{ds} \mathrm{Li}_s\Big(\frac{1}{k}\Big)\Big|_{s=0} - \log(k)$$

où Li est le polylogarithme.

On utilise ensuite la structure de produit tensoriel pour prouver plusieurs résultats sur les graphes toiles d'araignées. Certains sont des généralisations de propriétés connues, mais ce n'est pas le cas de tous. En particulier, on montre que $\mathcal{S}_{k,N,M}$ est isomorphe à deux graphes de Schreier distincts de $\mathcal{L}_k$ (les graphes sous-jacents sont les mêmes, mais l'étiquetage diffère) et on discute de leur transitivité. Je montre que $\mathcal{S}_{k,N,M}$ et $\vec{\mathcal{S}}_{k,N,M}$ sont transitifs si et seulement si $M \geq N$ et donne des bornes sur le nombre d'orbites lorsque $M < N$. Pour ce faire, on utilise essentiellement la structure de produit tensoriel pour les bornes supérieures, et celle de graphe de Schreier pour les bornes inférieures.

Finalement, je discute du cas des graphe de Rauzy qui correspondent à un sous-décalage là où les graphes de Bruijn correspondent au décalage total. Dans ce cadre, les graphes ne sont plus forcément régulier, il est donc impossible d'utiliser des actions de groupes ou des graphes de Schreier dans les preuves. Néanmoins, il est possible de montrer que, pour des sous-décalages de type fini satisfaisant une hypothèse technique, la limite des graphes de Rauzy est supportée sur des produits horocycliques d'arbres (pas forcément régulier). Les preuves ici consistent à placer les graphes de Rauzy sur les étages d'un arbre non-régulier construit par insertion de digit au milieu (et non à droite), puis d'utiliser Perron-Frobenius. Finalement, des calculs explicites sont faits pour les graphes de Rauzy sur l'alphabet binaire. Le seul cas ne découlant pas immédiatement de ce qui précède est le cas du sous-déplacement de Fibonacci (correspondant au mot interdit $\{11\}$).

Références

[1] Ajit C. Balram and Deepak Dhar. Non-perturbative corrections to mean-field critical behavior : the spherical model on a spider-web graph. *J. Phys. A*, 45(12) :125006, 14, 2012.

[2] Khalid Bou-Rabee, Paul-Henry Leemann, and Tatiana Nagnibeda. Weakly maximal subgroups in regular branch groups. *J. Algebra*, 455 :347–357, 2016.

[3] Charles Delorme and Jean-Pierre Tillich. The spectrum of de Bruijn and Kautz graphs. *European J. Combin.*, 19(3) :307–319, 1998.

[4] Paul Erdős and Alfréd Rényi, editors. *Combinatorial theory and its applications. I-III.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1970. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 4.

[5] Dominik Francoeur and Paul-Henry Leemann. Subgroup induction property for branch groups. *arXiv e-prints*, page arXiv :2011.13310, November 2020.

[6] Alejandra Garrido. Abstract commensurability and the Gupta-Sidki group. *Groups Geom. Dyn.*, 10(2) :523–543, 2016.

[7] Christopher D. Godsil. GRRs for nonsolvable groups. In *Algebraic methods in graph theory, Vol. I, II (Szeged, 1978)*, volume 25 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 221–239. North-Holland, Amsterdam-New York, 1981.

[8] Rostislav I. Grigorchuk. Solved and unsolved problems around one group. In *Infinite groups : geometric, combinatorial and dynamical aspects*, volume 248 of *Progr. Math.*, pages 117–218. Birkhäuser, Basel, 2005.

[9] Rostislav I. Grigorchuk, Paul-Henry Leemann, and Tatiana Nagnibeda. Lamplighter groups, de Brujin graphs, spider-web graphs and their spectra. *J. Phys. A*, 49(20) :205004, 35, 2016.

[10] Rostislav I. Grigorchuk and John S. Wilson. A structural property concerning abstract commensurability of subgroups. *J. London Math. Soc. (2)*, 68(3) :671–682, 2003.

[11] Rostistlav Grigorchuk, Paul-Henry Leemann, and Tatiana Nagnibeda. Finitely generated subgroups of branch groups and subdirect products of just infinite groups. *arXiv e-prints*, page arXiv :2006.16121, June 2020.

[12] D. Hetzel. *Über reguläre graphische Darstellung von auflösbaren Gruppen.* PhD thesis, Technische Universität Berlin, 1976.

[13] Wilfried Imrich. Graphen mit transitiver Automorphismengruppe. *Monatsh. Math.*, 73 :341–347, 1969.

[14] Wilfried Imrich. On graphs with regular groups. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 19(2) :174–180, 1975.

[15] Wilfried Imrich and Mark E. Watkins. On automorphism groups of Cayley graphs. *Period. Math. Hungar.*, 7(3-4) :243–258, 1976.

[16] Paul-Henry Leemann. *On Subgroups and Schreier Graphs of Finitely Generated Groups.* PhD thesis, Université de Genève, 2016.

[17] Paul-Henry Leemann. Schreir graphs : Transitivity and coverings. *Internat. J. Algebra Comput.*, 26(1) :69–93, 2016.

[18] Paul-Henry Leemann. Weakly maximal subgroups of branch groups. *arXiv e-prints*, page arXiv :1910.06399, Oct 2019.

[19] Paul-Henry Leemann and Mikael de la Salle. Cayley graphs with few automorphisms. *J. Algebraic Combin.*, 2020.

[20] Paul-Henry Leemann and Mikael de la Salle. Cayley graphs with few automorphisms : the case of infinite groups. *arXiv e-prints*, page arXiv :2010.06020, October 2020.

[21] Joy Morris and Pablo Spiga. Classification of finite groups that admit an oriented regular representation. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 50(5) :811–831, 2018.

[22] Lewis A. Nowitz and Mark E. Watkins. Graphical regular representations of non-abelian groups. I, II. *Canad. J. Math.*, 24 :993–1008 ; ibid. 24 (1972), 1009–1018, 1972.

[23] Ekaterina L. Pervova. Everywhere dense subgroups of a group of tree automorphisms. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 231(Din. Sist., Avtom. i Beskon. Gruppy) :356–367, 2000.

[24] Rachel Skipper and Phillip Wesolek. On the Cantor-Bendixson rank of the Grigorchuk group and the Gupta-Sidki 3 group. *J. Algebra*, 555 :386–405, 2020.

[25] Mark E. Watkins. On the action of non-Abelian groups on graphs. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 11 :95–104, 1971.

[26] Mark E. Watkins. On graphical regular representations of $C_n \times Q$. pages 305–311. Lecture Notes in Math., Vol. 303, 1972.

[27] Mark E. Watkins. Graphical regular representations of alternating, symmetric, and miscellaneous small groups. *Aequationes Math.*, 11 :40–50, 1974.

[28] Mark E. Watkins. Graphical regular representations of free products of groups. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 21(1) :47–56, 1976.