Rapport d'activité de recherche

Paul-Henry Leemann

26 juin 2024

Je suis assistant-professeur à l'université Xi'An Jiaotong-Liverpool à Suzhou en Chine. Ma thèse, effectuée sous la direction de Tatiana Smirnova-Nagnibeda, a obtenu le prix Vacheron-Constantin de la meilleure thèse en mathématiques/physique/informatique de l'université de Genève. J'ai ensuite passé les quatre années suivante comme postdoc boursier à l'ENS de Lyon avec Mikael de la Salle. Puis je suis resté deux ans à travailler à l'université de Neuchâtel avec Alain Valette, d'abords comme postdoc puis comme collaborateur scientifique. J'ai finalement rejoint mon poste actuel à l'automne 2022.

Mes réalisations scientifiques incluent mon prix de thèse, l'obtention de plusieurs bourses mais surtout la résolution, avec M. de la Salle, d'une conjoncture vieille de 40 ans à propos des automorphismes des graphes de Cayley. Pour démontrer cette conjecture, nous avons utilisé des outils de combinatoire, de théorie géométrique des groupes ainsi que des résultats sur les probabilités de commutation dans les groupes infinis.

Mes recherches se situent dans le domaine de la théorie géométrique et combinatoire des groupes ainsi qu'en théorie des graphes et en dynamique symbolique. Je suis en particulier intéressé par les phénomènes de rigidité dans les graphes de Cayley et de Schreier, les limites et revêtements de graphes (de Schreier), les groupes agissant sur des arbres enracinés et leurs sous-groupes (faiblement) maximaux, ainsi qu'aux graphes associés à des systèmes dynamiques. J'ai plus précisément orienté mes recherches selon 5 axes principaux, distincts mais non sans liens entre eux. Les graphes de Schreier sont un thème sous-jacent de ces recherches.

Le premier thème s'intéresse plus particulièrement au phénomène de rigidité dans les graphes de Cayley. Dans [LS21 ; LS22a ; LS22b], nous montrons avec M. de la Salle que la plupart des groupes G de rang fini admettent un système de générateurs S tels que le groupe d'automorphismes du graphe de Cayley $\mathrm{Cay}(G, S)$ soit égal à G.

Le deuxième thème, très lié au premier, traite de la transitivité des graphes ainsi que des revêtements. Je donne dans [Lee16b ; Lee16a] une caractérisation algébrique de la transitivité d'un graphe de Schreier et répond partiellement à une conjecture de Benjamini concernant les graphes qui peuvent être revêtu par un graphe de Cayley donné. De manière surprenante, ce sujet est aussi lié aux groupes simples. Dans [Lee22], je démontre aussi que tout graphe régulier est soit isomorphe à un graphe de Schreier, soit admet un revêtement de degré 2 isomorphe à un graphe de Schreier.

Un troisième thème de recherche concerne les graphes de Bruijn et leurs différentes généralisations. Des physiciens ont récemment montré, [BD12], que, à la limite, ces graphes partageaient certaines caractéristiques des graphes de Cayley du groupe de l'allumeur de réverbère. Avec mes coauteurs, nous donnons dans [GLN16] une explication satisfaisante à ce phénomène, en terme de limite de graphe. Cela permet de mieux comprendre le comportement des graphes de Bruijn, mais aussi de pouvoir facilement faire des calculs sur le groupe de l'allumeur de réverbère. Au passage, on aborde le produit tensoriel de graphes et certains systèmes dynamiques.

Le quatrième thème de recherche part lui de l'étude des sous-groupes du groupe de Grigorchuk, avec une attention toute particulière portée aux sous-groupes faiblement maximaux. D'une part, [BLN16 ; Lee16a], on montre l'existence de nombreux tels sous-groupes dans tout groupe branché, d'autre part, [Lee24], je donne une description complètes de ses sous-groupes dans le cas du groupe de Grigorchuk. Dans [GLN21 ; Fra+24] avec mes co-auteurs nous caractérisons les sous-groupes branché de rang fini du groupe de Grigorchuk. Caractérisation qui a des conséquences pour l'étude de la topologie profinie. Finalement, avec D. Francoeur nous montrons dans [FL24] que certains des résultats précités restent vrais dans le cadre plus général des groupes possédant la *propriété d'induction des sous-groupes*. Nous démontrons aussi que tout groupe GGS de torsion possède la sus-dite propriété.

Finalement, je me suis intéressé à certaines propriétés de points fixes (comme la propriété (T)) et à leur interaction avec le produit en couronne [LS22c ; LS24].

Table des matières

1 Rigidité des graphes de Cayley

Les résultats de cette section proviennent d'un travail en commun avec M. de la Salle, [LS21 ; LS22a ; LS22b].

Soit G un groupe et S un système de générateur. On peut associer au couple (G, S) son graphe de Cayley $\mathrm{Cay}(G, S^{\pm})$. Les sommets de $\mathrm{Cay}(G, S^{\pm})$ sont les éléments de G et il y a une arrête entre g et h si et seulement si $g^{-1}h$ ou $h^{-1}g$ est dans S. Cette construction est bien connue et permet de voir G comme un espace métrique. Le groupe G agit sur $\mathrm{Cay}(G, S^{\pm})$ par multiplication à gauche, ce qui donne donc une injection de G dans le groupe $\mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(G, S^{\pm}))$ des automorphismes de $\mathrm{Cay}(G, S^{\pm})$. Si cette injection est en fait une égalité, on dit que $\mathrm{Cay}(G, S^{\pm})$ est une *représentation graphique régulière* de G.

De tels graphes ont aussi peu d'automorphismes que possible tout en étant des graphes de Cayley. Ces graphes sont intéressant d'un point de vue combinatoire, mais aussi parce qu'ils permettent de représenter le groupe G comme un groupe d'automorphisme d'un graphe avec de *bonnes propriétés*. D'un point de vue historique, le sujet remonte à 1936 et à la question de König : *quel groupe G peut être obtenu comme le groupe d'automorphisme d'un graphe* Γ *?* Frucht en 1939 (pour le groupes finis), puis Groot en 1959 et Sabidussi en 1960 ont démontrés que n'importe quel groupe peut être obtenu de cette manière. La question suivante est : est-il possible d'obtenir le même résultat si on met des contraintes plus forte sur Γ, comme par exemple être transitif ? Plus précisément, Γ est une représentation graphique régulière de G si et seulement si $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ et si $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ agit simplement transitivement sur les sommets.

Les groupes abéliens d'exposant au moins 3 ne possèdent pas de représentation graphique régulière (prendre l'application inverse), de même que les groupes dicycliques généralisés. La question suivante a occupée de nombreux mathématiciens à la fin des années 1970 :

Conjecture 1 (Watkins [Wat76])**.** *Il existe en entier n tel que tout groupe de cardinalité au moins n et qui n'est ni abélien d'exposant au moins 3 ni dicyclique généralisé est rigide.*

Plusieurs cas particulier de cette conjecture ont déjà été prouvés. C'est en particulier le cas pour les groupes finis, suite aux travaux de Imrich, Watkins, Nowitz, Hetzel et Godsil dans les années 1970, [Imr69 ; ER70 ; Wat71 ; NW72 ; Wat72 ; Wat74 ; Imr75 ; IW76 ; Het76 ; God81]. De plus, les groupes finis exceptionnels sont complètement compris : il en existe 13, tous de cardinalité au plus 32, cf. [God81]. D'autre part, Watkins à démontré [Wat76] que cette conjecture est vrai pour les produits libres de groupes.

Avec M. de la Salle nous avons traité le cas infini de rang fini. Celui-ci est obtenu en combinant les deux résultats suivants :

Théorème 2 ([LS21])**.** *Soit G un groupe de rang fini qui n'est ni abélien ni dicyclique généralisé. Si G a un élément d'ordre au moins $(2\,\mathrm{rank}(G))^{36}$ alors il est rigide.*

Théorème 3 ([LS22a])**.** *Soit G un groupe de rang fini non virtuellement abélien. Alors G est rigide.*

Puisqu'un groupe virtuellement abélien infini de rang fini contient un élément d'ordre infini, la conjonction des deux théorèmes ci-dessus ainsi que des résultats pour les groupes finis donne une réponse positive à la conjecture 1 ; tout du moins pour les groupes de rang fini.

Pour prouver les théorèmes sus-cités, nous explorons deux notions de rigidités. Le graphe $\mathrm{Cay}(G, s)$ est dit *orientation-rigide* si tout automorphisme préservant l'étiquetage des arêtes non-orientées préserve aussi l'étiquetage des arêtes orientées et *couleur-rigide* si tout automorphisme préserve l'étiquetage des arêtes non-orientées. Il est ainsi clair qu'une représentation graphique régulière pour G est un graphe qui est à la fois orientation-rigide et couleur-rigide. Nous montrons tout d'abords que pour un groupe G sont équivalent le fait de n'être ni abélien d'exposant au moins 3 ni dicyclique généralisé et le fait que pour tout ensemble de générateurs S le graphe $\mathrm{Cay}(G, S^{\leq 3})$ est orientation-rigide. Nous montrons ensuite que si G est de rang fini engendré par S et possède un élément d'ordre suffisamment grand (dépendant de $|S|$), alors il existe un système de générateurs $S \subset T$ tel que $\mathrm{Cay}(G, T)$ soit couleur-rigide. Finalement, en utilisant les marches aléatoires nous démontrons l'équivalent de la précédante assertion pour les groupes non-virtuellement abélien de rang finis.

Notre méthode nous permet aussi d'obtenir un analogue du théorème 2 pour les graphes dirigés ainsi que des résultats de rigidité sur le graphes revêtu par $\mathrm{Cay}(G, T)$:

Théorème 4 ([LS21]). *Pour tout premier $p > 263$ et tout monstre de Tarski $\mathcal{T}_p$, il existe un ensemble de générateurs T de taille 12 tel que si $\psi\colon \mathrm{Cay}(\mathcal{T}_p, T) \to \Delta$ est un revêtement dont les restrictions sur les boules de taille 1 sont des isomorphismes, alors ou ψ est l'identité, ou Δ est infini et l'action de son groupe d'automorphisme sur les sommets à des orbites finies. En particulier, si ψ n'est pas trivial, alors Δ n'est pas transitif, ni même quasi-transitif.*

Finalement, nous obtenons aussi le résultat suivant

Proposition 5 ([LS22b]). *Soit G un groupe de rang fini. Alors il admet un graphe de Cayley avec groupe d'automorphisme discret.*

Cela répond à

Conjecture 6 ([dT19]). *Tout groupe de rang fini admet un graphe de Cayley avec un groupe d'automorphisme discret.*

Remarquons au passage que cela implique, [dT19], que tout groupe de présentation finie admet un graphe de Cayley Γ *local-global rigide.* [1]

En fait, [LS22b] démontre une version plus précise de la proposition 5. Étant donné un groupe G, on définit son *indice de Cayley* comme l'infimum de $[\mathrm{Aut}(\mathrm{Cay}(G, S) : G]$, pris sur tous les systèmes de générateurs. Ainsi, G est rigide si et seulement si son indice de Cayley est égal à 1. En se basant sur les résultats de [LS21 ; LS22a], nous calculons dans [LS22b] l'indice de Cayley de tous les groupes infinis de rang finis. L'indice de Cayley des groupes finis a été calculé en 2018 par Morris et Tymburski [MT18] en se basant en partie sur les travaux pré-cités des années 70 sur les GRR pour les groupes finis.

1. i.e. $\exists r$ tel que si Δ est un graphe dont les r-boules sont isomorphes à celles de Γ, alors Γ revêt Δ.

Théorème 7. *[LS22b] Soit G un groupe infini de type fini. Alors son indice de Cayley est 2 si et seulement si G est abélien ou dicyclique généralisé. Dans les autres cas, son indice de Cayley est 1. De plus, le minimum est toujours atteint pour un ensemble fini de générateurs.*

2 Revêtements de graphes transitifs et simplicité forte des groupes

Les résultats de cette section ont pour l'essentiel été publiés dans [Lee16b] et [Lee22], le reste faisant l'objet du chapitre 3 de ma thèse.

Le point de départ des recherches menées dans cette section a été la question suivante de Benjamini. Existe-t-il un graphe de Cayley d'un groupe infini de rang fini (différent de $\mathbf{Z}$) qui ne recouvre aucun autre graphe infini transitif ? Si dans cette question on remplace « graphe transitif » par graphe de Cayley et qu'on demande que le revêtement préserve l'étiquetage (on parlera de *revêtement fort*), alors la réponse est oui. Il suffit de prendre n'importe quel groupe simple (ou plus généralement juste infini) infini et de rang fini.

Le cas général est plus compliqué. Une première étape a consisté à montrer que tout graphe transitif et localement fini était un graphe de Schreier d'un produit libre de la forme $F_n * (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{*m}$. Les *graphes de Schreier* $\mathrm{Sch}(G, H, S^{\pm})$, pour $H \leq G$, sont eux une généralisation naturelle des graphes de Cayley. Les sommets sont les classes à droites Hg et il y a une arrête entre Hg et Hh si et seulement si $g^{-1}Hh$ intersecte $S \cup S^{-1}$. On a donc une identification naturelle entre $\mathrm{Cay}(G, S^{\pm})$ et $\mathrm{Sch}(G, \{1\}, S^{\pm})$.

Dans ma thèse je démontre le résultat suivant.

Théorème 8 ([Lee16a])**.** *Soit Γ un graphe simple, connexe, localement fini, transitif de valence d impaire. Alors Γ admet un couplage parfait.*

Comme corollaire, on obtient

Corollaire 9. *Soit Γ un graphe connexe, transitif de valence d. Alors Γ est un graphe de Schreier d'un produit libre de la forme $F_n * (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{*m}$, où F_n est libre de rang n et $d = 2n + m$.*

Étant donné deux sous-groupes A et B d'un groupe, le graphe de Schreier de A revêt fortement celui de B si et seulement si A est contenu dans (un conjugué) de B. Pour répondre à la question de Benjamini, il est donc utile d'avoir une caractérisation algébrique de la transitivité d'un graphe de Schreier. Dans [Lee16b], je donne une caractérisation de l'isomorphisme entre deux graphes de Schreier en terme du système de générateur et des sous-groupes. La preuve de cette caractérisation est essentiellement combinatoire. Dans les cas des graphes de degré pair, cette caractérisation peut être reformulée dans des termes purement graphe-théoriques, sans réalisation préalable des graphes comme des graphes de Schreier, et peut être pensé comme un résultat de rigidité à la Mostow. Un corollaire immédiat est la caractérisation de la transitivité d'un graphe de Schreier en fonction du sous-groupe et du système de générateurs. De tels sous-groupes généralisent la notion de sous-groupes normaux et sont appelés *transitif par les longueurs*. Dans [Lee16b] et ma thèse, j'en débute l'étude, exhibant en particulier leur dépendance au système de générateurs ou le fait que l'intersection de deux sous-groupes transitifs par les longueurs est toujours transitive par les longueurs. Cette étude permet au passage de donner une nouvelle caractérisation des sous-groupes normaux des groupes de rang fini.

Proposition 10 ([Lee16b])**.** *Soit G un groupe de rang fini. Un sous-groupe $H \leq G$ est normal si et seulement si pour tout système de générateur S de taille au plus* $\mathrm{rang}(G)+1$ *le graphe de Schreier* $\mathrm{Sch}(G, H, S^{\pm})$ *est transitif.*

La notion de sous-groupes transitifs par les longueurs induit une notion de groupe fortement simple : tout groupe ne possédant aucun tels sous-groupes propres non-triviaux. Je prouve que cette notion est strictement plus forte que la simplicité, mais aussi strictement plus faible que le fait d'être cyclique d'ordre premier :

Proposition 11 ([Lee16b])**.** *D'une part, le groupe alterné A_n n'est pas fortement simple pour tout $n \geq 7$ impair.*

D'autre part, les monstres de Tarski sont fortement simple. [2]

Ceci permet de répondre partiellement à la question de Benjamini. En effet, par ce qui précède, tout graphe de Cayley d'un monstre de Tarski ne revêt fortement aucun autre graphe infini transitif. D'autres part, nous avons aussi une version pour les revêtements qui ne respecte pas forcément l'étiquetage. C'est le théorème 4 de la section précédante.

On peut aussi se poser la question de la structure de l'ensemble des sous-groupes transitifs par les longueurs. En effet, il est bien connu que si M et N sont deux sous-groupes normaux, alors $M \cap N$ et $\langle M \cup N\rangle$ sont aussi normaux. En d'autres termes, l'ensemble des sous-groupes normaux de G est un sous-treillis de l'ensemble des sous-groupe de G. Il suit de [Lee16a] que l'ensemble des sous-groupes faiblement normaux est stable par intersection. Il reste donc à traiter la question de l'union.

Dans [Lee16b] je montre aussi certaines généralisations du fait que si H est un quotient de G par un sous-groupe fini, alors leur deux graphes de Schreier sont quasi-isométriques.

Finalement, dans le cours texte [Lee22], je démontre le résultat suivant

Proposition 12 ([Lee22])**.** *Soit Γ un graphe d-régulier. Alors, soit Γ est isomorphique à un graphe de Schreier, ou Γ a un revêtement Δ de degré 2 qui est isomorphique à un graphe de Schreier.*

Dans les deux cas, on peut supposer que le graphe de Schreier est pris par rapport au groupe $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{*d}$.

Si ce résultat est un classique pour le cas d pair, il s'agit à ma connaissance de la première preuve formelle pour d impaire. La preuve suit essentiellement du théorème 8 et ni la preuve ni le résultat n'étonneront les spécialistes du domaine.

2. Ils sont même plus que cela : leurs graphes de Schreier ne sont même pas quasi-transitif, et ce pour tout système fini de générateurs.

3 Graphes de Bruijn et généralisations

Une partie des résultats de cette section à fait l'objet d'une publication dans [GLN16] et est un travail en commun avec R. Grigorchuk et T. Nagnibeda. La partie sur la complexité est un travail en commun avec T. Nagnibeda. Le calcul du nombre d'orbites dans les graphes toile d'araignée ainsi que la partie sur les graphes de Rauzy sont un travail personnel présent dans ma thèse. Finalement, l'étude des graphes de Rauzy pour les sous-décalage de complexité sous-exponentielles est un récent travail en commun avec T. Nagnibeda, A. Skripchenko et G. Vepreev [Lee+24].

L'étude des limites des graphes finis est un sujet de grand interêt tant pour les théoriciens des graphes que pour les probabilistes et les dynamiciens, avec des liens avec la physique statistique. Un des outils de bases dans ce domaine est la notion de limite de Benjamini-Schramm, introduite dans [BS01]. On défini la limite d'un séquence de graphes finis comme la limite faible (dans l'espace des mesures sur les graphes enracinés) des mesures sur les graphes finis consistant à choisir uniformément la racine.

Une fameuse séquence de graphes finis est celle des graphes de Bruijn — des graphes orientés représentant les recouvrements dans les séquences de symboles sur un alphabet fini. Les sommets de $\vec{\mathcal{B}}_{k,n}$ sont les séquences de n lettres sur l'alphabet $\{0,\dots,k-1\}$ et pour tout sommet $v = x_1 \dots x_n$ et tout a dans l'alphabet, il existe exactement une arête étiquetée par a partant de v, sont sommet final étant $x_2 \dots x_n a$. Les graphes de Bruijn et leur généralisations (graphes toiles d'araignées et graphes de Rauzy) sont des objets de grand intérêt mathématiques qui possèdent aussi de nombreuses applications dans des domaines divers. D'une part, d'un point de vu mathématique ils encodent dans des objets finis le comportement de sous-décalage et sont donc intéressant à la fois pour la combinatoire et la dynamique (symbolique). Ils possèdent aussi de bonnes propriétés de connectivités et de remarquables propriétés de percolations [Pip91 ; Pip92 ; Pip06] et spectrales. Finalement, ils sont reliés au groupe de l'allumeur de réverbères. D'autres part, les propriétés de ces graphes les rendent fort utiles pour les applications. Par example, les graphes toiles d'araignées $\mathcal{S}_{2,N,M}$ ont étés introduit par Ikeno en 1959 [Ike59] afin d'étudier les systèmes de switchs téléphoniques. Ils sont aussi important en physique statistique [BD12]. Les graphes de Rauzy quand à eux sont utiliser de manière intensive en bio-informatique pour encoder les séquences génomiques [Iqb+12].

Pour k fixé,les graphes de Bruijn forment une famille infinie dont le nombre de sommet est croissant, il est donc intéressant d'étudier les propriétés asymptotiques de cette famille. Un argument de plus pour l'étude de cette limit est l'article [BD12] des physiciens Balram et Dhar. En effet, ils y calculent les mesures spectrales des graphes toiles d'araignées et remarquent quelles convergent vers une distribution discrète. La distribution discrète de la mesure spectrale est un phénomène rare qui n'était connu jusqu'ici, pour le graphes de Cayley, uniquement pour le groupe de l'allumeur de réverbères. Il est donc naturel de demander si ce comportement est une coincidence ou le signe de quelque chose de plus profond. Dans [GLN16], avec Grigorchuk et Nagnibeda nous montrons que la limite de $(\vec{\mathcal{B}}_{k,n})_n$ (et plus généralement des graphes toiles d'araignées $\mathcal{S}_{k,N,M}$) est isomorphe (en tant que graphe non-étiqueté) au graphe de Cayley du groupe de l'allumeur de réverbère

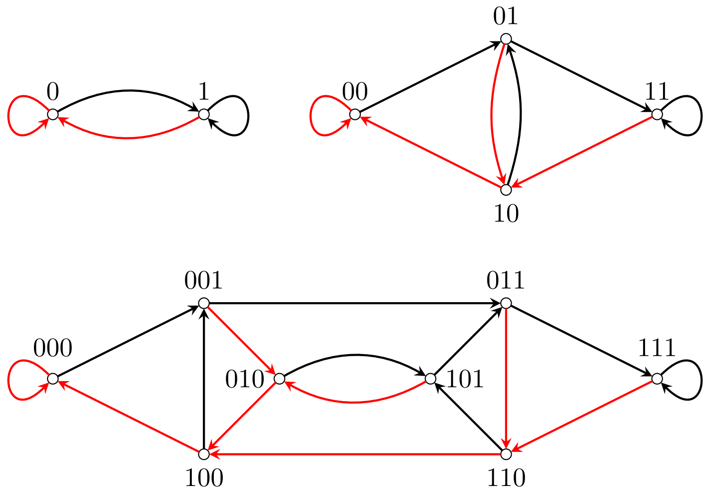

FIGURE 1 – Graphes de Bruijn $\vec{\mathcal{B}}_{2,1}$, $\vec{\mathcal{B}}_{2,2}$ and $\vec{\mathcal{B}}_{2,3}$.

$\mathcal{L}_k$ [3], ce qui implique la convergence des mesures et donc le résultat de Balram et Dhar. Ce dernier graphe est lui-même connu pour être le produit horocyclique, $\mathrm{DL}(k,k)$, de deux arbres (non enracinés) $k+1$ réguliers.

Théorème 13 ([GLN16]). *Pour tout k, la limite de Benjamini-Schramm (ou limite faible) des $\mathcal{S}_{k,N,M}$ est $\mathrm{DL}(k,k)$, et ce indépendamment de la manière dont l'on fait tendre N et M vers l'infini.*

La preuve de ce fait se déroule comme suit. Premièrement, on constate que les versions orientées $\vec{\mathcal{S}}_{k,N,M}$ sont isomorphes à des produits tensoriels de cycles $\vec{C}_M$ et de graphe de Bruijn $\vec{\mathcal{B}}_{K,N}$. On travail ensuite sur les produits tensoriels pour montrer qu'il suffit de s'occuper du cas $\vec{\mathcal{B}}_{K,N}$ qui correspond à $M=1$. Puis on montre que le graphe de Cayley de $\mathcal{L}_k$ est approximé par les graphes de Schreier de son action sur l'arbre enraciné k-régulier. Finalement, on prouve que $\vec{\mathcal{B}}_{K,N}$ est isomorphe au graphe de Schreier de l'action de $\mathcal{L}_k$ sur le N-ème niveau de l'arbre. Pour se faire, on utilise les graphes de lignes.

La structure de produit tensoriel des $\vec{\mathcal{S}}_{k,N,M}$ nous permet aussi de généraliser un argument dû à Delorme et Tillich, [DT98], afin de calculer la mesure spectrale de $\mathcal{S}_{k,N,M}$. On s'intéresse ensuite rapidement à la complexité (le nombre d'arbres couvrants) des graphes toile d'araignée et à leur fonction zeta spectrale. On montre en particulier que les fonctions zeta des graphes toile d'araignée convergent vers la fonction zeta de $\mathrm{DL}(k,k)$. Ceci nous permet de calculer le déterminant de Fuglede-Kadison de $\mathrm{DL}(k,k)$ et d'obtenir en particulier

$$\zeta'_{\mathrm{DL}(k,k)}(0) = (k-1)^2 \frac{d}{ds} \operatorname{Li}_s\left(\frac{1}{k}\right)\Big|_{s=0} - \log(k)$$

3. Ceci pour le système de générateur venant de la description comme groupe d'automate de $\mathcal{L}_k$, et non pas pour le système de générateur associé à sa structure de produit en couronne. Notons au passage que la preuve de [GLN16] utilise l'action de $\mathcal{L}_k$ sur un arbre enraciné, un thème récurent de ce projet

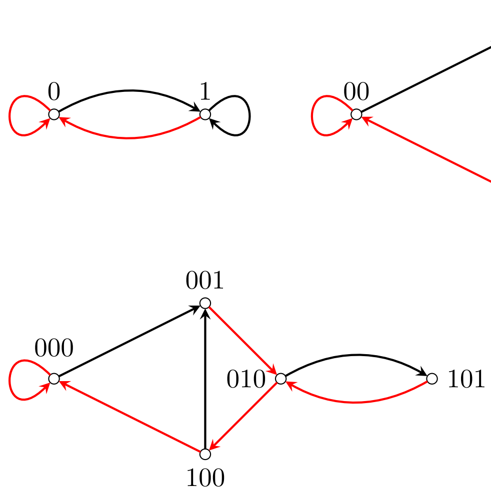

Figure 2 – Graphes de Rauzy $R_{2,1,\{11\}}$, $R_{2,2,\{11\}}$ et $R_{2,3,\{11\}}$.

où Li dénote le polylogarithme.

On utilise ensuite la structure de produit tensoriel pour prouver plusieurs résultats sur les graphes toiles d'araignées. Certains sont des généralisations de propriétés connues, mais ce n'est pas le cas de tous. En particulier, on montre que $\mathcal{S}_{k,N,M}$ est isomorphe à deux graphes de Schreier distincts de $\mathcal{L}_k$ (les graphes sous-jacents sont les mêmes, mais l'étiquetage diffère) et on discute de leur transitivité. Je montre que $\mathcal{S}_{k,N,M}$ et $\vec{\mathcal{S}}_{k,N,M}$ sont transitifs si et seulement si $M \geq N$ et donne des bornes sur le nombre d'orbites lorsque $M < N$. Pour ce faire, on utilise essentiellement la structure de produit tensoriel pour les bornes supérieures, et celle de graphe de Schreier pour les bornes inférieures.

Dans ma thèse je discute du cas des graphe de Rauzy qui correspondent à un sous-décalage là où les graphes de Bruijn correspondent au décalage complet. D'un point de vue pragmatique, étant donné un ensemble F de mots interdits sur l'alphabet $\{0, \ldots, k-1\}$, on définit le graphe de Rauzy $R_{k,n,F}$ comme le sous-graphe de $\vec{\mathcal{B}}_{k,n}$ obtenu en enlevant tous les sommets correspondants à des mots contenants des éléments de F comme sous-mot. Ainsi, pour $k = 1$ et $F = \{11\}$ on ne garde comme sommets que les mots ne contenant pas la séquence 11. Outre leur intérêt mathématique propre, les graphes de Rauzy sont beaucoup utilisé en biologie pour classifier des séquences d'ADN. Dans ce cadre plus général, j'ai montré dans ma thèse que pour les sous-décalages de type finis et sous certaines hypothèses techniques, les graphes de Rauzy $R_{k,n,F}$ ont pour limite une mesure μ_F supportée sur des produits horocycliques d'arbres. En général, les arbres considérés ne sont plus réguliers, mais on a néanmoins une description explicite de ceux-ci qui ne dépend que de F. Les graphes qui nous intéressent n'étant plus forcément régulier, il est donc impossible d'utiliser des actions de groupes ou des graphes de Schreier dans les preuves. Les preuves ici sont combinatoire et consistent à placer les graphes de Rauzy sur les étages d'un arbre non-régulier construit par insertion de digit au milieu (et non à droite), puis d'utiliser Perron-Frobenius. Finalement, des calculs explicites sont faits pour les graphes de Rauzy sur l'alphabet binaire. Le seul cas ne découlant pas immédiatement de ce qui précède est le cas du sous-déplacement de Fibonacci (correspondant au mot interdit $\{11\}$).

Dans un récent travail avec T. Nagnibeda, A. Skripchenko et G. Veprev [Lee+24] nous étudions les graphes de Rauzy associé à un sous-décalage, et plus généralement à un langage, de complexité $p(n)$ sous-exponentielle. Rappelons qu'un sous-décalage de type fini a lui toujours une complexité exponentielle (ou bornée). Dans ce cadre nous démontrons

Théorème 14 ([Lee+24])**.** *Soit $\mathcal{L}$ un langage factoriel et presque prolongeable de fonction de complexité $p(n)$. Sont équivalents :*

1. *Les graphes de Rauzy R_n convergent vers la droite $\mathbf{Z}$,*
2. *Les graphes de Rauzy orienté $\vec{R}_n$ convergent vers la droite orientée $\vec{\mathbf{Z}}$,*
3. *$p(n)$ est non bornée, croit sous-exponentiellement et la limite des graphes de Rauzy R_n existe,*
4. *$p(n)$ est non bornée, croit sous-exponentiellement et la limite des graphes de Rauzy orientés $\vec{R}_n$ existe,*
5. *$p(n)$ est non bornée et $\lim_n \frac{p(n+1)}{p(n)} = 1$,*
6. *Les mesures spectrales empiriques μ_{R_n} convergent vers une mesure qui a densité $\frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$ relativement à la mesure de Lebesgue sur $[-2,2]$.*
7. *$p(n)$ croit sous-exponentiellement.*

Un point important pour nous est qu'un langage $\mathcal{L}$ est factoriel et prolongeable si et seulement si il est le langage d'un sous-décalage bilatère (sur $\mathbf{Z}$). De plus, si $\mathcal{L}$ est le langage d'un sous-décalage monolatère (sur $\mathbf{N}$) possédant un ensemble fini avec orbite dense (par exemple un sous-décalage minimal), alors $\mathcal{L}$ est factoriel et presque prolongeable.

Remarquons aussi que la droite orientée $\vec{\mathbf{Z}}$ est elle aussi un produit horocyclique de deux arbres ! En effet, $\vec{\mathbf{Z}}$ est le produit horocyclique de deux copies de $\vec{\mathbf{Z}}$.

4 Structure des sous-groupes des groupes branchés

L'essentiel de mes contribution sur les groupes branchés ont étés publiées dans [BLN16 ; GLN21 ; Fra+24 ; FL24 ; Lee24]. Ceux dont ce n'est pas le cas proviennent de ma thèse [Lee16a].

Les groupes branchés sont des groupes agissant sur un arbre enraciné tel que les stabilisateurs des sommets soient « gros ». Ils jouent un rôle important (à côté des groupes simples et des groupes héréditairement juste infini) [Gri00] dans la classification des groupes *justes infinis* (les groupes infinis dont tous les quotients propres sont finis). Pour un groupe infini, être juste infini est un relâchement de la condition de simplicité : on admet des quotients non-triviaux, mais seulement s'ils sont finis, et donc dans un certain sens triviaux du point de vue de la théorie géométrique des groupes. Cette condition et à la fois naturelle du point de vue de la géométrie à large échelle, et utile en pratique puise tout groupe infini de rang fini admet un quotient juste infini. Une découverte majeure de Wilson dans les années 1970 (raffinée plus tard par Grigorchuk) est que la classe des groupes juste infini se sépare en trois sous-catégories qui sont, essentiellement, les groupes simples, les groupes héréditairement juste infini (tous les sous-groupes d'indice fini de G sont juste infini ; comme $\mathbf{Z}$ ou $\mathrm{SL}(n, \mathbf{Z}), n \geq 3$) et les groupes branchés juste infinis. Les groupes dans cette dernière catégorie sont des exemples de groupes agissant fidèlement sur des arbres enracinés et son caractérisés par une structure de sous-groupes très riche, malgré le fait qu'ils soient juste infinis. Un exemple marquant d'un tel groupe est le premier groupe de Grigorchuk $\mathcal{G}$. Il s'agit du premier exemple connu de groupe de croissance intermédiaire (répondant à une question de Milnor, 1968) ainsi que de groupe moyennable mais non-élémentairement moyennable (répondant à une question de Day, 1957) [Gri80 ; Gri84].

Les groupes auto-similaire apparaissent eux naturellement en dynamique [Nek05] et sont des exemples de groupes d'automates. Bien que ces deux classes soient différentes, leur intersection est non-vide et contient de nombreux exemples intéressant, dont $\mathcal{G}$. Les groupes branchés auto-similaire sont une source importante d'exemples exotiques et de contre-exemples en théorie géométrique des groupes, et leur étude à suscité beaucoup d'intérêts ces vingt dernières années. Ainsi, la classe des groupes branchés auto-similaire de rang fini contient des examples de groupes de torsion et de groupes sans torsion, de groupes de croissances intermédiaire et de groupes de croissance exponentielle, de groupes moyennables et de de groupes non-moyennables.

Formellement, si T est un arbre enraciné d-régulier (la racine a degré d et tous les autres sommets $d+1$), un sous-groupe $G \leq \mathrm{Aut}(T)$ est *branché* si l'action induite $G \curvearrowright \partial T$ sur le bord de l'arbre est minimal et si pour tout n le sous-groupe

$$\prod_{v \text{ à distance } n \text{ de la racine}} \mathrm{Rist}_G(v)$$

a indice fini dans G, où $\mathrm{Rist}_G(v) = \bigcap_{w \text{ n'est pas un descendant de } v} \mathrm{Stab}_G(w)$ est le *stabilisateur rigide* de v, c'est-à-dire sous-groupe des éléments de G agissant trivialement en-dehors de T_v l'ensemble des descendants de v.

Supposons maintenant que T soit un arbre enraciné régulier et $G \leq \mathrm{Aut}(T)$. Pour tout sommet v, notons T_v le sous-arbre enraciné en v des sommets w telles que la géodesique entre w et la racine passe par v. On a un isomorphisme naturel entre T_v et T. Ceci nous donne donc une application $\varphi_v \colon \mathrm{Stab}_G(v) \to \mathrm{Aut}(T_v) = \mathrm{Aut}(T)$. Le groupe G est *auto-similaire* si $\varphi_v(\mathrm{Stab}_G(v)) \leq G$ pour tout v, et *auto-réplicant* si on a égalité pour tout v.

Parmi les exemples populaires de groupes branchés auto-similaires, on retrouve le premier groupe de Grigorchuk $\mathcal{G}$ (qui agit sur T_2 l'arbre 2-régulier). La structure des sous-groupes de $\mathcal{G}$ a été étudiée par plusieurs auteurs. On connait ainsi les stabilisateurs des sommets de T_2 et des points du bord ∂T_2, les stabilisateurs rigides, les centralisateurs, les sous-groupes de petit indice [GW03 ; Lee16a] et les sous-groupes maximaux (qui sont 7, tous d'indice 2 par [Per00]).

L'étape suivante est l'étude des *sous-groupes faiblement maximaux*, c'est-à-dire des sous-groupes maximaux parmi les sous-groupes d'indice infini. Le point de départ de cet étude est la démonstration par Bartholdi et Grigorchuk que dans un groupe branché, tous les sous-groupes paraboliques (les stabilisateurs des points de ∂T) sont faiblement maximaux, infinis et distincts. En partant de là, plusieurs problèmes naturels se présentent. Existe-t-il d'autres sous-groupes faiblement maximaux ? Si oui, ont-ils de bonnes propriétés, et est-il possible de les classer ?

Avec K. Bou-Rabee et T. Nagnibeda nous avons montré

Théorème 15 ([BLN16])**.** *Soit G un groupe branché. Alors tout sous-groupe fini Q de G est contenu dans un nombre non-dénombrable de sous-groupes faiblement maximaux.*

En particulier, pour le groupe de Grigorchuk ou les groupes spinaux généralisés, si on prend $Q = \langle a \rangle$ on obtient qu'il existe un nombre non-dénombrable de sous-groupes faiblement maximaux qui ne sont pas paraboliques. En effet, a ne stabilisant aucun rayon il ne peut pas être contenu dans des sous-groupes paraboliques. La preuve pour Q quelconque est un argument diagonal et possède des similitudes avec la preuve de Margulis et Soĭfer pour l'existence d'un nombre non-dénombrable de sous-groupes maximaux d'indices infinis dans les groupes linéaires non virtuellement résoluble. On suppose qu'il n'existe qu'un nombre dénombrable de sous-groupes faiblement maximaux $(W_i)_{i\geq 1}$. Il s'agit de trouver un groupe $H = H_1$ ayant de « bonnes propriétés » et un élément g_1 n'appartenant pas à W_1 tel que $H_2 \coloneqq \langle H_1, g_1\rangle$ ait toujours ces fameuses bonnes propriétés. Au final, on obtient $H = \bigcup_i H_i$ un sous-groupe d'indice infini qui n'est contenu dans aucun des W_i, d'où la contradiction. Dans le cas particulier des groupes branchés, une des « bonnes propriétés » est que $\mathrm{Stab}_{H_i}(n)$ fixe un sous-arbre, pour un certain n qui ne dépend pas de i. Ceci assure que H_i soit d'indice infini. Il reste ensuite à vérifier qu'on peut toujours trouver g_i et itérer le processus. Au passage, nous prouvons que les sous-groupes faiblement maximaux dans un groupe de torsion sont auto-normalisant (égal à leur normalisateur).

Dans [BLN16], nous montrons aussi qu'il existe des sous-groupes faiblement maximaux vivant aussi bas que l'on veut dans l'arbre. Plus précisément : pour tout sommet v de l'arbre, il existe un sous-groupe faiblement maximal W_v tel que W_v stabilise v, mais ne stabilise aucun sommet situé sur un niveau plus bas.

Dans ma thèse, je démontre aussi une légère amélioration du résultat de Margulis et Soĭfer pour le cas spécifiques des groupes libres non-abéliens. Dans ce cas, il existe un continuum de sous-groupes maximaux d'indice infini. Le « gain » par rapport à la version non-dénombrable est faible (voir nul si l'on croit à l'hypothèse du continu), mais le réel avantage réside dans la preuve qui est bien plus courte et facile à comprendre que celle du cas générale. En effet, puisque tout graphe $2d$-régulier est un graphe de Schreier du groupe F_d, l'existence de sous-groupes maximaux d'indice infinis revient à trouver des graphes infinis $2d$-régulier qui ne revêtent fortement aucun graphe, a part eux-mêmes et la rose. Ce dernier critère est relativement aisé à vérifier.

À la fin de ma thèse j'investigue rapidement les graphes de Schreier des sous-groupes de $\mathcal{G}$, montrant en particulier qu'il existe des sous-groupes faiblement maximaux dont le graphe de Schreier n'est pas isomorphe, même en oubliant l'étiquetage, au graphe de Schreier d'un sous-groupe parabolique.

Finalement, dans [Lee24] j'identifie deux familles de sous-groupes faiblement maximaux dans les groupes branchés. La première famille est une généralisation des sous-groupes paraboliques et consiste en les stabilisateurs (ensemblistes) $\mathrm{Stab}_G(C)$ de fermés non-ouvert C du bord ∂T de l'arbre tel que $\mathrm{Stab}_G(C)$ agit minimalement sur C. Ces sous-groupes, que j'appelle *paraboliques généralisés* partagent de nombreuses propriétés avec les sous-groupes paraboliques. La deuxième famille contient les sous-groupes faiblement maximaux avec une *structure à blocs*. Heuristiquement, un sous-groupe de G a une structure à blocs si, à indice fini près, il est un produit de copies de G (certaines inclues diagonalement) ; les figures 3 et 4 pourront éventuellement aider à se faire une idée. En particulier, la description d'un sous-groupe à bloc fait intervenir un nombre fini de sommets de T.

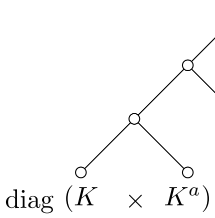

Figure 3 – Un sous-groupe à bloc du premier groupe de Grigorchuk. B et K sont des sous-groupes d'indice fini (8 et 16) de $\mathcal{G}$. Ici B sous le sommet de droite signifie que l'on considère les éléments de $\mathrm{Aut}(T)$ fixant ce sommet v, agissant comme un élément de B sous le sous-arbre enraciné en v et trivialement ailleurs. Le sous-groupe final, est le produit de cette copie de B et du sous-groupe $\mathrm{diag}(K \times K^a)$; cf la figure 4.

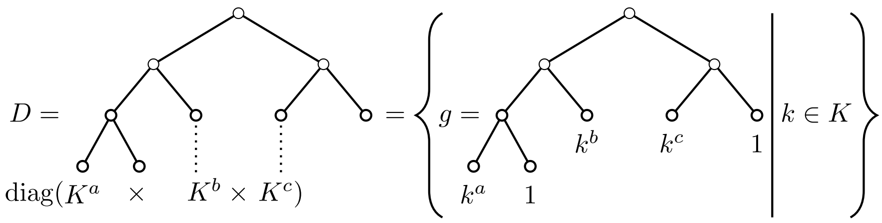

Figure 4 – Un sous-groupe diagonal du premier groupe de Grigorchuk. Il est constitué des éléments $g \in \mathrm{Aut}(T)$ fixant les feuilles de l'arbre et agissant comme k^a sous la feuille la plus à gauche, comme l'identité sur la feuille voisine, etc.

Dans [GLN21], nous démontrons avec R. Grigorchuk et T. Nagnibeda que pour le groupe de Grigorchuk, les sous-groupes avec une structure à blocs coincident avec les sous-groupes de rang fini. Au passage, nous obtenons aussi une caractérisation des produits sous-directs (sous-groupe du produit qui se projette surjectivement sur chaque facteur) des groupes juste-infinis. Grâce à cela, j'ai pu démontrer le résultat de classification suivant :

Théorème 16 ([Lee24])**.** *Soit $\mathcal{G}$ le groupe de Grigorchuk. Les sous-groupes faiblement maximaux de $\mathcal{G}$ appartiennent à l'une des deux classes suivantes : paraboliques généralisés* *et faiblement maximaux avec une structure à blocs. Ces deux classes admettent de nombreuses caractérisations, comme montré dans la table 1.*

parabolique généralisé	structure à blocs
pas de rang fini	de rang fini
$\forall v : \mathrm{Rist}_W(v)$ est infini	$\exists v : \mathrm{Rist}_W(v) = \{1\}$
$\forall F \subset \partial T$ fini $W.F$ pas dense dans ∂T	$\exists F \subset \partial T$ fini avec $W.F$ dense dans ∂T
$\forall n \exists v \in \mathcal{L}_n : [\varphi_v(\mathcal{G}) : \varphi_v(W)]$ est infini	$\exists n \forall v \in \mathcal{L}_n : [\varphi_v(\mathcal{G}) : \varphi_v(W)]$ est fini

TABLE 1 – Les deux classes de sous-groupes faiblement maximaux du groupe de Grigorchuk. Ici $\varphi_v(\mathcal{G})$ est un raccourcis pour $\varphi_v(\mathrm{Stab}_{\mathcal{G}}(v))$, alors que $\mathcal{L}_n$ dénote le n-ème level de l'arbre (l'ensemble des sommets à distance n de la racine).

En fait, les résultat de [Lee24] ne concernent pas seulement le groupe de Grigorchuk, mais plus généralement les groupes branchés auto-réplicants ayant la *propriétés d'induction des sous-groupes* (que nous ne définirons pas explicitement ici). Ainsi nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 17 ([GLN21 ; Fra+24])**.** *Soit G un groupe branché, auto-réplicant et avec la propriété d'induction des sous-groupes. Supposons de plus que l'action de G sur l'arbre soit* aussi primitive que possible *(les seuls partitions préservées sont celles provenant de la structure de l'arbre). Alors les sous-groupes de rang fini de G coincident avec ses sous-groupes avec une structure à blocs.*

Au vu de ce qui précède, il est clair que la propriété d'induction des sous-groupes est un outil important pour l'étude des groupes branchés. Il est ainsi naturel de vouloir pousser la recherche dans deux directions : trouver d'autres conséquences de la propriétés d'induction des sous-groupes, et exhiber de nouveaux examples de groupes la possédant. En effet, seulement deux exemples de groupes avec la propriété d'induction des sous-groupes étaient connus : le groupe de Grigorchuk [GW03] et le 3-groupe de Gupta-Sidki [Gar16]. Dans [FL24] avec D. Francoeur nous poussons plus loin l'étude des groupes avec la propriété d'induction des sous-groupes. Tout d'abords nous fournissons une infinité d'exemples :

Théorème 18 ([FL24])**.** *Les groupes GGS de torsions possèdent la propriété d'induction des sous-groupes.*

Ensuite nous démontrons que cette propriété a de nombreuses conséquences. Avant de les énoncer, rappelons que la *topologie profinie* est la topologie engendré par les classes à gauche des sous-groupes d'indice fini. Ainsi, un groupe est résiduellement fermé si et seulement si $\{1\}$ est fermé dans la topologie profinie.

Théorème 19 ([FL24])**.** *Soit G un groupe branché auto-similaire de rang fini avec la propriété d'induction des sous-groupes. Alors G est torsion, juste infini et LERF (*localement extensivement résiduellement fini *: tout sous-groupe de rang finis fermé dans la topologie profinie).*

Si de plus G est un p-groupe et H est un sous-groupe de rang fini de G, alors tous les sous-groupes maximaux de H ont indice fini. De plus, dans ce cas tous les sous-groupes faiblement maximaux de G sont fermés dans la topologie profinie.

En combinant le théorème 18 et les résultats de [Lee24] sur l'existence d'un continuum de sous-groupes faiblement maximaux, nous obtenons

Corollaire 20. *Le premier groupe de Grigorchuk ainsi que les GGS de torsion possèdent un continuum de sous-groupes fermés dans la topologie profinie.*

Ceci est à notre connaissance, le premier example de groupe de type fini avec un continuum de sous-groupes fermés dans la topologie profinie.

5 Produit en couronne et propriétés de points fixes

Les résultats de cette sous-section ont étés publiés dans les deux articles [LS22c ; LS24]. Lorsqu'on étudie une propriété de groupes, il est courant de demander si elle est stable pour les opérations « naturelles » sur les groupes. Une telle opération est le produit en couronne, qui généralise le produit cartésien. Rappelons qu'étant donnée deux groupes G et H et un H-espace X, on définit le *produit en couronne (permutationnel)*

$$G \wr_X H \coloneqq \left(\bigoplus_X G\right) \rtimes H,$$

où H agit sur la somme directe par permutation des facteurs. Ainsi, si X est réduit à un point l'on retrouve le produit direct de G et H.

Dans le contexte des propriétés de points fixes, un premier résultat sur les produits en couronne a été obtenu par Cherix, Martin et Valette avant d'être raffiné par Neuhauser et concerne la propriété (T) de Kazhdan :

Théorème 21 ([CMV04 ; Neu05])**.** *Soit G et H deux groupes discrets, avec G non-trivial, et X un ensemble muni d'une H-action. Le produit en couronne $G \wr_X H$ a la propriété (T) si et seulement si G et H ont tous les deux la propriété (T) et X est fini.*

La propriété (T) étant équivalente pour les groupes dénombrables, par le théorème de Delorme-Guichardet, à la propriété FH (toute action sur un Hilbert à un point fixe), le théorème ci-dessus peut donc être vu comme un résultat sur une propriété de point fixe.

Des résultats similaires ont par la suite été obtenus pour les propriétés FA (toute action sur un arbre à un point fixe) et F$\mathbf{R}$ (actions sur des arbres réels) [CK11] ou FW (action sur des complexes cubiques CAT(0)) [Cor13 ; LS22c]. Si tous ces résultats se ressemblent, leurs démonstrations utilisaient des méthodes ad hoc et n'était pas généralisable.

Avec Schneeberger, nous avons tout d'abords terminé la preuve du cas FW : $G \wr_X H$ possède la propriété FW si et seulement si G et H ont FW et X est fini. Nous avons surtout donné une preuve élémentaire de ce fait en utilisant les graphes de Schreier [LS22c].

Mais notre principal apport à ce sujet [LS24] consiste à changer la focale et à ne plus regarder les propriétés sus-nommées comme des propriétés de points fixes, mais comme des propriétés d'orbites bornées. Ce changement de point de vue nous à permis d'obtenir une preuve simple et unifiée des différents résultats sus-nommés. De plus, cela permet une généralisation très large de ces résultats.

Définition 22 ([LS24])**.** *Soit* $\boldsymbol{S}$ *une sous-catégorie de* ***Met*** *la catégorie des espaces métriques munies des applications non-expansives.*[4] *Un groupe* G *a* la propriété B**S** *si toute* G*-action par* $\boldsymbol{S}$*-morphismes sur un* $\boldsymbol{S}$*-espace a ses orbites bornées.*

Pour un sous-groupe $H \leq G$, on peut aussi définit la notion de propriété B**S** relative : toute G-action possède des H-orbites bornées.

Comme cas particulier de propriétés de type B**S**,[5] nous avons :

— *La propriété de Bergman* pour **S**=**Met**,

— *La propriété FB*$_r$ pour **S**=**Ban** la catégorie des espaces de Banach réfléxifs réels (avec les isométries affines comme homomorphismes),

— *La propriété FH* pour **S**=**Hil** la catégorie des espaces de Hilbert réels (avec les isométries affines comme homomorphismes),

— *La propriété FW* pour **S**=**Med** la catégorie des graphes médians connexes,

— *La propriété F*$\boldsymbol{R}$ pour **S** la catégorie des arbres réels,

— *La propriété FA* pour **S** la catégorie des arbres,

— *Cofinalité non-dénombrable* pour **S** la catégorie des espaces ultra-métriques.

Ces propriétés sont reliées entre elles de la manière suivante :

$$\begin{tikzcd}
\text{Propriété de Bergman} \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{FB_r} \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{FH} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{FW} \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & & \mathrm{F}\mathbf{R} \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{FA} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Cofinalité non-dénombrable}
\end{tikzcd}$$

De plus, à l'exception éventuelle de l'implication [Propriété de Bergman $\Longrightarrow$ $\mathrm{FB_r}$], toutes ces implications sont strictes.

Il est possible de définir d'autres propriétés du même genre : $\mathrm{FHyp}_{\mathbf{C}}$ (**S** étant les espaces hyperboliques complexes ou réels), BB (pour les espaces de Banachs réels), $\mathrm{B}L^p$ (pour les espaces L^p). Finalement, un groupe ne se surjecte pas sur $\mathbf{Z}$[6] si et seulement si il a la propriété B**S** où **S** contient un seul objet : un arbre 2-régulier (le graphe de Cayley standard de $\mathbf{Z}$) et où on ne regarde que les morphismes préservant l'orientation.

S'il est possible de définir un zoo de nouvelles propriétés de type B**S**, il est illusoire de vouloir prouver un résultat de stabilité sur les produits en couronne pour n'importe

4. Plus généralement, on peut regarder une sous-catégorie de **PMet**, la catégorie des espaces pseudo-métriques.

5. Les noms $\mathrm{FB_r}$, FH, ... viennent du fait que ces propriétés ont historiquement d'abord été définies comme des propriétés de points fixes.

6. Rappelons que d'après un résultat classique de Serre, un groupe a FAsi et seulement si il est de cofinalité non-dénombrable, ne se surject pas sur $\mathbf{Z}$ et n'est pas un amalgame.

Catégorie **S**	Propriété correspondantes	satisfait l'axiome		
		(A1)	(A2)	(A3)
Espaces métriques	Propriété de Bergmann	✓	✓	✓
Espaces de Banach	BB	✓	✓	✓
Espaces de Banach refléxifs	$\mathrm{FB_r}$	✓	✓	✓
Espaces L^p (p fixés)	$\mathrm{B}L^p$	✓	✓	$\iff p \neq \infty$
Espaces de Hilbert	FH	✓	✓	✓
Espaces hyperboliques /**R** et **C**	$\mathrm{FHyp}_{\mathbf{C}}$	✗	✗	✗
Graphes médians	FW	✓	✓	✓
Arbres réels	F**R**	✓	✗	✗
Arbres	FA	✓	✗	✗
Espaces ultramétriques	cofinalité non-dénombrables	✓	✓	✗
Arbres 2-réguliers avec Isom^+	B**Z**	✗	✗	✗
Espaces de diamètres finis	vrai pour tous les groupes	✓	✓	✗

Table 2 – Axiomes satisfait par **S**

laquelle de ces propriétés. En effet, un tel résultat est en général faux. Il faut donc se restreindre à certaines sous-catégories de **Met**.

Définition 23 ([LS24])**.** *Une sous-catégorie **S** de **Met** a* des actions de groupes non-triviales *(axiome (A1)), si pour tout groupe non-trivial G il existe un **S**-espace X et une action de G sur X par **S**-automorphisme qui bouge au moins un point.*

***S** satisfait l'*axiome (A2) *si elle possède des puissances cartésiennes finies compatibles avec la bornologie,* [7]

***S** satisfait l'*axiome (A3) *si elle possède des puissances cartésiennes infinies compatibles avec la bornologie.* [8]

La Table 2 contient un résumé des axiomes satisfait par les catégories précédemment mentionnées.

Il est maintenant possible d'énoncer le résultat principal de [LS24] :

Théorème 24 ([LS24])**.** *Soit **S** une catégorie satisfaisant les axiomes (A1), (A2) et (A3) de la définition 23. Soit G un groupe non-trivial et H un groupe agissant sur un ensemble X. Le produit en couronne $G \wr_X H$ a la propriété B**S** si et seulement si G et H ont tous les deux la propriété B**S** et X est fini.*

Ce résultat s'applique en particulier à la propriété de Bergman, ainsi qu'aux propriétés $\mathrm{FB_r}$, FH et FW.

Une légère modification de la preuve permet d'obtenir

7. Pour tout **S**-espace X et tout entier n il existe une structure de **S**-espace sur X^n, compatible avec la bornologie, cf [LS24] pour une définition précise.
8. Voir [LS24] pour une définition précise.

Théorème 25 ([LS24]). *Soit G un groupe non-trivial et H un groupe agissant sur un ensemble X. Le produit en couronne $G \wr_X H$ a cofinalité non-dénombrable si et seulement si G et H ont tous les deux cofinalité non-dénombrable $B\mathbf{S}$ et H agit sur X avec un nombre fini d'orbites.*

Finalement, nous obtenons une très légère amélioration des résultats de [CK11] :

Théorème 26 ([LS24]). *Soit G un groupe non-trivial et H un groupe agissant sur un ensemble X sans points fixes. Le produit en couronne $G \wr_X H$ a la propriété FA (respectivement F$\mathbf{R}$) si et seulement si H a la propriété FA (respectivement F$\mathbf{R}$), H agit sur X avec un nombre fini d'orbites, G ne se surjecte pas sur $\mathbf{Z}$ et G a cofinalité non-dénombrable.*

Références

[BD12] Ajit C. Balram et Deepak Dhar. « Non-perturbative corrections to mean-field critical behavior : the spherical model on a spider-web graph ». In : *J. Phys. A* 45.12 (2012), p. 125006, 14. issn : 1751-8113. doi : 10.1088/1751-8113/45/12/125006 (cf. p. 2, 7).

[BLN16] Khalid Bou-Rabee, Paul-Henry Leemann et Tatiana Nagnibeda. « Weakly maximal subgroups in regular branch groups ». In : *J. Algebra* 455 (2016), p. 347-357. issn : 0021-8693. doi : 10.1016/j.jalgebra.2016.02.009 (cf. p. 2, 10, 12).

[BS01] Itai Benjamini et Oded Schramm. « Recurrence of distributional limits of finite planar graphs ». In : *Electron. J. Probab.* 6 (2001), no. 23, 13 pp. (electronic). issn : 1083-6489. doi : 10.1214/EJP.v6-96 (cf. p. 7).

[CK11] Yves Cornulier et Aditi Kar. « On property (FA) for wreath products ». In : *J. Group Theory* 14.1 (2011), p. 165-174. issn : 1433-5883. doi : 10.1515/JGT.2010.044 (cf. p. 15, 18).

[CMV04] Pierre-Alain Cherix, Florian Martin et Alain Valette. « Spaces with measured walls, the Haagerup property and property (T) ». In : *Ergodic Theory Dynam. Systems* 24.6 (2004), p. 1895-1908. issn : 0143-3857. doi : 10.1017/S0143385704000185 (cf. p. 15).

[Cor13] Yves Cornulier. « Group actions with commensurated subsets, wallings and cubings ». In : *arXiv e-prints*, arXiv :1302.5982 (fév. 2013), arXiv :1302.5982. arXiv : 1302.5982 [math.GR] (cf. p. 15).

[dT19] Mikael de la Salle et Romain Tessera. « Characterizing a vertex-transitive graph by a large ball ». In : *J. Topol.* 12.3 (2019), p. 705-743 (cf. p. 4).

[DT98] Charles Delorme et Jean-Pierre Tillich. « The spectrum of de Bruijn and Kautz graphs ». In : *European J. Combin.* 19.3 (1998), p. 307-319. issn : 0195-6698. doi : 10.1006/eujc.1997.0183 (cf. p. 8).

[ER70] Paul Erdős et Alfréd Rényi, éd. *Combinatorial theory and its applications. I-III.* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 4. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1970, Vol I : 390 pp., Vol. II : i–iv and pp. 395-799, Vol III : i–iii and pp. 803-1201 (cf. p. 3).

[FL24] Dominik Francoeur et Paul-Henry Leemann. « Subgroup induction property for branch groups ». In : *arXiv e-prints* (mars 2024). arXiv : `2011.13310 [math.GR]` (cf. p. 2, 10, 14).

[Fra+24] Dominik Francoeur, Rostislav Grigorchuk, Paul-Henry Leemann et Tatiana Nagnibeda. « On the structure of finitely generated subgroups of branch groups ». In : *arXiv e-prints* (fév. 2024). doi : `10.48550/arXiv.2402.15496` (cf. p. 2, 10, 14).

[Gar16] Alejandra Garrido. « Abstract commensurability and the Gupta-Sidki group ». In : *Groups Geom. Dyn.* 10.2 (2016), p. 523-543. issn : 1661-7207. doi : `10.4171/GGD/355` (cf. p. 14).

[GLN16] Rostislav I. Grigorchuk, Paul-Henry Leemann et Tatiana Nagnibeda. « Lamplighter groups, de Brujin graphs, spider-web graphs and their spectra ». In : *J. Phys. A* 49.20 (2016), p. 205004, 35. issn : 1751-8113. doi : `10.1088/1751-8113/49/20/205004` (cf. p. 2, 7, 8).

[GLN21] Rostislav I. Grigorchuk, P.-H. Leemann et T. V. Nagnibeda. « Finitely generated subgroups of branch groups and subdirect products of just infinite groups ». In : *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* 85.6 (2021), p. 104-125. issn : 1607-0046. doi : `10.4213/im9101` (cf. p. 2, 10, 13, 14).

[God81] Christopher D. Godsil. « GRRs for nonsolvable groups ». In : *Algebraic methods in graph theory, Vol. I, II (Szeged, 1978).* T. 25. Colloq. Math. Soc. János Bolyai. North-Holland, Amsterdam-New York, 1981, p. 221-239 (cf. p. 3).

[Gri00] Rostislav I. Grigorchuk. « Just infinite branch groups ». In : *New horizons in pro-p groups.* T. 184. Progr. Math. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000, p. 121-179 (cf. p. 10).

[Gri80] Rostislav I. Grigorchuk. « On Burnside's problem on periodic groups ». In : *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 14.1 (1980), p. 53-54. issn : 0374-1990 (cf. p. 11).

[Gri84] Rostislav I. Grigorchuk. « Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means ». In : *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 48.5 (1984), p. 939-985. issn : 0373-2436 (cf. p. 11).

[GW03] Rostislav I. Grigorchuk et John S. Wilson. « A structural property concerning abstract commensurability of subgroups ». In : *J. London Math. Soc. (2)* 68.3 (2003), p. 671-682. issn : 0024-6107. doi : `10.1112/S0024610703004745` (cf. p. 11, 14).

[Het76] D. Hetzel. « Über reguläre graphische Darstellung von auflösbaren Gruppen ». Thèse de doct. Technische Universität Berlin, 1976 (cf. p. 3).

[Ike59] Nobuichi Ikeno. « A limit on crosspoint numbers ». In : *IRE Trans. Inform. Theory* 5 (1959), p. 18-196 (cf. p. 7).

[Imr69] Wilfried Imrich. « Graphen mit transitiver Automorphismengruppe ». In : *Monatsh. Math.* 73 (1969), p. 341-347. doi : 10.1007/BF01298984 (cf. p. 3).

[Imr75] Wilfried Imrich. « On graphs with regular groups ». In : *J. Combinatorial Theory Ser. B* 19.2 (1975), p. 174-180 (cf. p. 3).

[Iqb+12] Z. Iqbal, M. Caccamo, I. Turner, P. Flicek et G. McVean. « De novo assembly and genotyping of variants using colored de Bruijn graphs ». In : *Nature Genetics* 44 (2012) (cf. p. 7).

[IW76] Wilfried Imrich et Mark E. Watkins. « On automorphism groups of Cayley graphs ». In : *Period. Math. Hungar.* 7.3-4 (1976), p. 243-258. issn : 0031-5303. doi : 10.1007/BF02017943 (cf. p. 3).

[Lee+24] Paul-Henry Leemann, Tatiana Nagnibeda, Alexandra Skripchenko et Georgii Veprev. « Limits of Rauzy graphs of languages with subexponential complexity ». In : *arXiv e-prints* (fév. 2024). doi : 10.48550/arXiv.2402.15877 (cf. p. 7, 10).

[Lee16a] Paul-Henry Leemann. « On Subgroups and Schreier Graphs of Finitely Generated Groups ». Thèse de doct. Université de Genève, 2016 (cf. p. 1, 2, 5, 6, 10, 11).

[Lee16b] Paul-Henry Leemann. « Schreir graphs : Transitivity and coverings ». In : *Internat. J. Algebra Comput.* 26.1 (2016), p. 69-93. issn : 0218-1967. doi : 10.1142/\-S021819671650003X (cf. p. 1, 5, 6).

[Lee22] Paul-Henry Leemann. « Up to a double cover, every regular connected graph is isomorphic to a Schreier graph ». In : *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin* 28.3 (2022), p. 373-379. doi : 10.36045/j.bbms.210416 (cf. p. 1, 5, 6).

[Lee24] Paul-Henry Leemann. « Weakly maximal subgroups of branch groups ». In : *arXiv e-prints* (mars 2024). arXiv : 1910.06399 [math.GR] (cf. p. 2, 10, 13-15).

[LS21] Paul-Henry Leemann et Mikael de la Salle. « Cayley graphs with few automorphisms ». In : *J. Algebraic Combin.* 53.4 (2021), p. 1117-1146. issn : 0925-9899. doi : 10.1007/s10801-020-00956-1 (cf. p. 1, 3, 4).

[LS22a] Paul-Henry Leemann et Mikael de la Salle. « Cayley graphs with few automorphisms : the case of infinite groups ». In : *Annales Henri Lebesgue* 5 (2022), p. 73-92. doi : 10.5802/ahl.118 (cf. p. 1, 3, 4).

[LS22b] Paul-Henry Leemann et Mikael de la Salle. « Most rigid representation and Cayley index of finitely generated groups ». In : *Electron. J. Combin.* 29.4 (2022), Paper No. 4.40, 9. issn : 1077-8926. doi : 10.37236/10512 (cf. p. 1, 3-5).

[LS22c] Paul-Henry Leemann et Grégoire Schneeberger. « Property FW and wreath products of groups : a simple approach using Schreier graphs ». In : *Expo. Math.* 40.4 (2022), p. 1261-1270. issn : 0723-0869,1878-0792. doi : 10.1016/j.exmath.2022.07.001 (cf. p. 2, 15).

[LS24] Paul-Henry Leemann et Grégoire Schneeberger. « Wreath products of groups acting with bounded orbits ». In : *Enseign. Math.* 70.1 (2024), p. 121-149. issn : 0013-8584,2309-4672. doi : 10.4171/LEM/1059 (cf. p. 2, 15-18).

[MT18] Joy Morris et Josh Tymburski. « Most rigid representations and Cayley index ». In : *Art Discrete Appl. Math.* 1.1 (2018), Paper No. 1.05, 12. doi : 10.26493/2590-9770.1242.809 (cf. p. 4).

[Nek05] Volodymyr Nekrashevych. *Self-similar groups*. T. 117. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005, p. xii+231. isbn : 0-8218-3831-8. doi : 10.1090/surv/117 (cf. p. 11).

[Neu05] Markus Neuhauser. « Relative property (T) and related properties of wreath products ». In : *Math. Z.* 251.1 (2005), p. 167-177. issn : 0025-5874. doi : 10.1007/s00209-005-0794-9 (cf. p. 15).

[NW72] Lewis A. Nowitz et Mark E. Watkins. « Graphical regular representations of non-abelian groups. I, II ». In : *Canad. J. Math.* 24 (1972), 993-1008, ibid. 24 (1972), 1009-1018. issn : 0008-414X. doi : 10.4153/CJM-1972-101-5 (cf. p. 3).

[Per00] Ekaterina L. Pervova. « Everywhere dense subgroups of a group of tree automorphisms ». In : *Tr. Mat. Inst. Steklova* 231.Din. Sist., Avtom. i Beskon. Gruppy (2000), p. 356-367. issn : 0371-9685 (cf. p. 11).

[Pip06] Nicholas Pippenger. « The linking probability of deep spider-web networks ». In : *SIAM J. Discrete Math.* 20.1 (2006), 143-159 (electronic). issn : 0895-4801. doi : 10.1137/050624376 (cf. p. 7).

[Pip91] Nicholas Pippenger. « The blocking probability of spider-web networks ». In : *Random Structures Algorithms* 2.2 (1991), p. 121-149. issn : 1042-9832. doi : 10.1002/rsa.3240020202 (cf. p. 7).

[Pip92] Nicholas Pippenger. « The asymptotic optimality of spider-web networks ». In : *Discrete Appl. Math.* 37/38 (1992), p. 437-450. issn : 0166-218X. doi : 10.1016/0166-218X(92)90150-9 (cf. p. 7).

[Wat71] Mark E. Watkins. « On the action of non-Abelian groups on graphs ». In : *J. Combinatorial Theory Ser. B* 11 (1971), p. 95-104 (cf. p. 3).

[Wat72] Mark E. Watkins. « On graphical regular representations of $C_n \times Q$ ». In : *Graph theory and applications (Proc. Conf., Western Michigan Univ., Kalamazoo, Mich., 1972 ; dedicated to the memory of J. W. T. Youngs)*. Springer, Berlin, 1972, 305-311. Lecture Notes in Math., Vol. 303 (cf. p. 3).

[Wat74] Mark E. Watkins. « Graphical regular representations of alternating, symmetric, and miscellaneous small groups ». In : *Aequationes Math.* 11 (1974), p. 40-50. issn : 0001-9054. doi : 10.1007/BF01837731 (cf. p. 3).

[Wat76] Mark E. Watkins. « Graphical regular representations of free products of groups ». In : *J. Combinatorial Theory Ser. B* 21.1 (1976), p. 47-56 (cf. p. 3).